



TITLE:

金属の疲労破壊に関する理論的研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

伊原, 千秋

CITATION:

伊原, 千秋. 金属の疲労破壊に関する理論的研究. 京都大学, 2003, 博士 (工学)

ISSUE DATE:

2003-11-25

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r11339>

RIGHT:

新制

工

1299

金属の疲労破壊に関する 理論的研究

2003年10月

伊原千秋

金属の疲労破壊に関する
理論的研究

2003年10月

伊原千秋

目次

第1章 緒論	1
第2章 疲労き裂発生	11
2.1 緒言	11
2.2 き裂発生確率モデル	13
2.3 計算結果と実験との比較	24
2.4 結言	28
第3章 疲労き裂伝ば	31
3.1 緒言	31
3.2 疲労き裂伝ばモデル	35
3.3 き裂伝ば機構	51
3.4 実験結果との比較	57
3.5 結言	64
第4章 結論	67
付録A $F_\ell(U/\sigma)$ の導出	71
付録B (3.22) 式の導出	75
付録C 数値計算上の注意	77
謝辞	81

静的な引張り強さより小さい荷重でも、繰返して作用させると、材料が破壊するという所謂疲労と呼ばれる現象は、古くから知られていたようであるが、鉄道の普及によって車軸の折損事故が多発するようになると、そうした事故の解決という現実的な問題のために、疲労の研究がはじめられた。1850年代の有名な Wöhler⁽¹⁾ の一連の研究が生まれた背景には、そのような事情があったわけで、その結果、負荷応力と破断繰返し数との関係を求めることが、その中心課題であった。

しかし、1880年代以降になると、これとは別に材料強度の研究課題の一つとして、疲労の研究が取り上げられはじめた。すなわち、1903年に Ewing と Humfrey⁽²⁾ が金属顕微鏡を用いて疲労の初期過程を連続観察して、結晶粒中に発生したすべり帯の中にき裂が発生することを明らかにし、その後、き裂の発生に関する種々の観察結果が報告されることになったが、同時に Forsyth⁽³⁾ によるき裂の伝ば過程に関する研究も発表され、結局材料の疲労破壊過程は、き裂の発生と伝ばからなる、という観点から研究されるようになった。

そのうち、き裂発生は光学顕微鏡、電子顕微鏡による材料の表面観察から内部構造の解明まで、非常に多くの金属学的、結晶学的な成果が得られたが、発生機構の力学的な理論研究はあまり進んでいない。

1. 緒論

一方、き裂伝ばは、長いき裂の伝ばに対して行われた Paris と Erdogan⁽⁴⁾ による破壊力学の適用により、急速に進展した。すなわち、疲労き裂伝ば速度が破壊力学の主要な力学量である応力拡大係数範囲のべき関数として表されることが示されたため、多くの研究者の関心が集まるようになった。

さらに、Elber⁽⁵⁾ は伝ば中の疲労き裂の閉口現象の存在を実験的に明らかにし、き裂が開口している間の応力拡大係数の範囲を有効応力拡大係数範囲 ΔK_{eff} と名付けて、き裂伝ば速度と ΔK_{eff} との間にもべき乗則が成立することを明らかにした。き裂閉口現象の重要性は多くの場合に確認され、平均応力ばかりでなく、変動応力、板厚の効果を説明するのにも成功している。

このようにき裂伝ばは、その伝ば機構に関してはともかくとして、力学的な取扱いは一応可能になり、それに関連した領域での研究をも促すようになったことは注目に値する。

ところで、現在、材料の強度と破壊を包括的に研究する材料強度学という学問分野がある(これは横堀⁽⁶⁾によって名付けられた)。その中には、基礎的な力学として、転位論と破壊力学を含んでいる。

現実の材料の塑性変形強度や破壊強度が、理論的な強度の $1/10 \sim 1/100$ 程度しかないことの説明として、塑性変形強度に対しては転位がその原因であるとする転位論が、1930年代に Orowan⁽⁷⁾, Taylor⁽⁸⁾, Polanyi⁽⁹⁾ たちによって提案され、破壊強度に関しても転位がその原因であるとする理論が Stroh⁽¹⁰⁾ たちによって形成されたが、その後、種々の転位観察がなされるに到って、転位の存在が確認され、転位の力学的性質が大いに研究された。すなわち、転位論は材料強度のミクロ分野に焦点を当てたものである。

一方、先に述べた破壊力学は、大型船の脆性破壊や航空機の疲労破壊による

墜落事故を契機として、1958年頃から研究がはじめられた材料強度の研究分野であるが、これは連続体の力学、就中、材料力学を基礎とするマクロ分野の学問である。

疲労破壊はミクロに起こって、マクロに現れる現象であるから、上記の何れか一方の力学だけで考察することはできず、ミクロとマクロの結合を如何にして達成するかが、材料強度学の当初からの課題であった。その一つの試みとして、横堀⁽¹¹⁾による強度と破壊に対する確率過程論が登場したが、根本的な解決には到っていなかった。

本論文の課題である金属疲労の理論的研究は、ミクロに立脚したマクロの現象を、ミクロからマクロにまで、あるいは逆にマクロからミクロへの過程を追うことによって、疲労破壊という現象を説明しようとするもので、その意味では横堀の考えに沿うものである。

しかし、ミクロとマクロは長さのスケールで考えると、遙かに遠く離れた世界であり、その結び付きは極めて困難とされるが、ミクロの損傷のエネルギーとマクロの破壊のエネルギーがどのような過程を通して結び付くかを考えると、問題解決の糸口が見えてくる。たとえ同じ量のエネルギーであっても、ミクロとマクロとでは、担い手が変わると考えればよい。疲労現象では、ミクロのエネルギーの担い手は転位で、この転位群のもつエネルギーが、それぞれの役割に応じて、マクロの現象を実現すると考えればよいのである——以上の考えは後にわかったことであって、われわれは当初からこのような観点から問題の解決に当たったわけではなかった。

しかし幸運にも、1977年に発表した“確率現象としての金属疲労”⁽¹²⁾、および1981年の“疲労き裂伝ばに対する損傷累積モデル”⁽¹³⁾の二つの論文に用いら

1. 緒論

れた確率過程が今日それぞれ疲労き裂の発生および伝ばに対するミクロとマクロを結ぶ役割を果たすことになったが、当時われわれはこれが上述のような役割を果たすものとの認識が薄く、ただ単にこのような確率過程を用いると、き裂発生寿命の特徴的な寿命曲線がうまく算出できること、またき裂伝ばに関しては、Oh⁽¹⁴⁾による“疲労き裂伝ば速度を予知するための最弱リンクモデル”を修正、拡張し、き裂発生モデルの時と同様の処方を導入することにより Paris 則が導き出されることが、その役割であると考えていた。すなわち、これらの確率モデルではその中に含まれているパラメータの物理的な意味付けが十分に明らかにされていなかったため、モデルが単なる数学的なモデルに過ぎず、現象論的モデルの域を脱することが出来なかった。

われわれが金属疲労を数理的な確率過程と見做したのは、次のような事情による。

1976年に“指数減衰を伴う累積過程の初到達問題”と題する故障物理学の論文⁽¹⁵⁾が発表されたが、これがわれわれの考えていた疲労過程のイメージにピッタリであり、しかもこの難解な問題が見事に解かれていたので、これを早速、疲労き裂の発生寿命の算出に用いたのである。

その結果、き裂発生寿命の概念的な S-N 曲線が容易に得られたので、そのモデルの中に含まれているパラメータの物理的な意味に深い考察を加えるまでに、多くの時間を要する結果になったわけである。

上記の論文が発表されて約 20 年後、これら放置された数学的モデルを物理的なモデルに変えるため、その中のパラメータに物理的な意味を与えようとの試みがはじめられた。

先ず、この確率モデルで最初に与えられるマクロの量は力ではなく、エネルギー

ギであると考え、ミクロでもエネルギーを取扱う必要があった。疲労現象では、ミクロの主役は転位であるから、エネルギーの意味をもつパラメータは転位のもつ弾性エネルギーと転位密度の積の形で表すのが妥当である。そのように考えると――

(1): き裂発生⁽¹⁶⁾に関しては、外部から与えられた繰返し応力によるマクロ的なエネルギーが転位群のエネルギーとしてミクロ的に蓄えられるものと、熱エネルギー等として外に流出するものにわかれ、ある特定の場所に累積した転位エネルギーが表面エネルギーの2倍に等しくなったとき、その場所にそれらの転位がもつエネルギーが形を変えて、マクロ的なき裂になると考えられる。この場合、発生に対する確率過程によるエネルギーの移り替わりがミクロとマクロを結び付けていることになる。

前に述べたように、き裂発生に関しては、現象が実験的には詳細に観察されているが、力学的な解明には手が着けられていなかったのは、この過程に関しては特に重要な発生寿命の問題が、転位の累積過程に著しく依存し、その過程の解明が重要な部分を占めていたことによるものと思われる。

(2): き裂伝ぱ現象⁽¹⁷⁾に関しては、外部から与えられた伝ぱを引起こすエネルギーはマクロ的なエネルギー、すなわち、破壊力学で論じられるエネルギー解放率であるが、われわれの提案した確率過程を通じて、ミクロのエネルギーの担い手である転位の集合全体のエネルギーに変換され、それらの転位のもつエネルギーがそれぞれの役割に応じて、き裂発生のエネルギーと塑性変形のエネルギーにわけられ、き裂の発生

1. 緒論

と開口をもたらして、き裂の伝ばが実現するわけである。

この場合、外部から与えられたエネルギー解放率は全体としては ΔK を用いて表されるが、そのうち ΔK_{eff} を用いて表されるエネルギー解放率が直接新しくき裂を伝ば(き裂の発生とし開口)させるエネルギーになり、二つのエネルギー解放率の差は、既にき裂となっている部分を再び開口させるための変形のエネルギーとして消費され则认为すべきである。

ミクロの転位論とマクロの破壊力学を包含した材料強度学は、われわれの手法によってミクロとマクロが結び付けられ、疲労破壊に関する限り、一応の解決の目途が立ったわけである。要はエネルギーの流れがどのような過程で、どのような形に変わって、移り替わるかがわかれば、それぞれの現象の説明が可能になるわけである。すなわち、転位論や破壊力学とは異なった観点に立ったエネルギー変遷の過程(これは確率論的損傷累積過程である)が解明されてはじめて、ミクロとマクロを含む破壊現象の全貌が明らかになった次第である。

金属の疲労破壊の研究には既に150年の年月が費やされているが、本研究はこの問題を力学的に解明し、実用条件下の複雑な疲労破壊に対する設計および保安基準の確立に学問的な基礎を与えるという工学的、技術的な意義をもつものであることは論を待たない。

第2章では、き裂発生の中で最も問題になる発生寿命を取り上げる。特に代表的な高サイクル疲労におけるき裂発生寿命を確率論的損傷累積過程を通じて求める。

また、第3章では、き裂伝ばで最もよく研究されている **mode I** 型のき裂伝ばを取り上げて、その伝ば機構がミクロ、マクロの両面から解明される。この伝

ば機構に詳しく立ち入れたのは、菅田ら⁽¹⁸⁾によってなされた **mode I** 疲労き裂先端近傍のすべり変形の詳細な原子間力顕微鏡 (AFM) 観察の報告の賜物であって、この研究結果を再考察することにより、われわれのモデルの真価を発揮することが出来たわけである。

第4章では、本研究で得られた主な結果を結論としてまとめた。

1. 緒論

参考文献

- (1) A.Wöhler, *Zeit Bauwesen*, **8**(1858) 642-655.
 ibid., **10**(1860) 583-610.
 ibid., **13**(1863) 233-258.
 ibid., **16**(1866) 67-83.
 ibid., **20**(1870) 74-106.
 “Wöhler’s Experiments on the Strength of Materials”,
 Engineering, **4**(1867) 160-161.
- (2) J.A.Ewing and J.C.W.Humfrey, *Phil.Trans.Roy.Soc.*,
 200(1903) 241-250.
- (3) P.J.E.Forsyth, *Act.Met.*, **11**(1963) 703-715.
- (4) P.Parris and F.Erdogan, *J.Basic Eng.Trans.ASME*, **85**(1963) 528-534.
- (5) W.Elber, *ASTM STP*, **486**(1971) 230-242.
- (6) 横堀武夫, 材料強度学, 技報堂 (1955).
- (7) E.Orowan, *Zeit.Phys.*, **89**(1934) 605-659.
- (8) G.I.Taylor, *Proc.Roy.Soc.*, **A145**(1934) 362-404.
- (9) M.Polanyi, *Zeit.Phys.*, **89**(1934) 660-664.
- (10) A.N.Stroh, *Advances in Physics*, **6**(1957) 418-465.
- (11) 横堀武夫, 材料強度学 (第2版), 岩波書店 (1974).
- (12) C.Ihara and A.Tsurui, *J.Engng.Mater.Tech.Trans.ASME*, **99**(1977) 26-28.

- (13) C.Ihara and A.Igarashi, *J.Engng.Mater.Tech.Trans.ASME*,
103(1981) 293-297.
- (14) K.P.Oh, *J.Engng.Mater.Tech.Trans.ASME*, **100**(1978) 170-174.
- (15) A.Tsurui and S.Osaki, *Stochastic Processes and Their Applications*,
4(1976) 79-88.
- (16) C.Ihara and T.Tanaka, *Fatigue Fract.Engng.Mater.Struct.*,
23(2000) 375-380.
- (17) 伊原千秋, 田中武之, 日本機械学会論文集,A, 69(2003) に掲載決定.
- (18) 菅田淳, 植松美彦, 谷本憲史, 上南恵資, 橋本亜希桐, 城野政弘,
日本機械学会論文集,A, **66**(2000) 83-90.

第2章

疲労き裂発生

2.1 緒言

金属の疲労現象を確率的な現象と見做すことは自然なことである．というのは、き裂発生寿命の分布が、その平均値を大きくずれ、そのずれは避けられないからである．この観点から横堀ら⁽¹⁾は疲労の確率論的な理論を展開した．

金属疲労は本来、金属内の損傷の累積によって起こることから、これを取扱うには累積過程を用いる必要があるが、損傷は金属内に残留するエネルギーによって起こると考えられる．そして累積するエネルギーは繰返し応力の下では、累積と減衰を繰返すと考えられることから、回復現象を考慮することも重要である．

この章では、上の議論の線に沿って、疲労き裂発生寿命の大部分を占める初期硬化が飽和した段階における疲労に対する確率論的損傷累積モデル⁽²⁾を提案し、き裂発生までの寿命を求める．すなわち、繰返し応力のもとで、疲労損傷が転位の形で金属内部に不規則に蓄積し、局所的に累積した転位による歪エネルギーがある特定の値をこえた時、微小なき裂が発生する、と仮定した．このためモデルは“指数減衰を伴う累積過程に対する初到達問題”に対する当時の最新理論⁽³⁾の助けによって解析され、またモデル中に現れる量は、特に転位の振

2. 疲労き裂発生

舞いを通して説明されることに注意しなければならない。そしてこのモデルでは、1サイクル当たりの平均エネルギーは単位体積当たりではなく、転位の増殖源当たりの値であるとしたことから、発生するき裂の大きさはセル程度の大きさとなった。

かくして、モデルは以下の観点から考察される。

- (1)：疲労き裂発生は $1\mu\text{m}$ 以下のメゾ領域の現象であって、それは繰返し応力の下での転位の増殖と累積によって起こる——すなわち、転位がこの過程の主役である。
- (2)：すべり帯き裂の発生をもって、き裂発生と見做す。
- (3)：き裂発生の定義、およびモデル中のパラメータは蓄積された転位のエネルギーと関連して定義される。

以下では、モデルは最初、上の観点から構築され、次に発生寿命、さらにき裂の大きさ、深さがこのモデルから求められる。

最後に、モデルの無矛盾性を示すために、理論結果は低炭素鋼 S20C を用いた高サイクル疲労試験の結果⁽⁴⁾と比較される。

2.2 き裂発生確率モデル

モデルは次のように提案される.

繰返し応力 $S \sin \omega t$ (S : 応力振幅, ω : 角振動数) が材料に加えられるとき, 1 サイクルあたりに材料に与えられるエネルギー Y は, 材料内部に不規則に存在する結晶の不均一性の影響を受けるため, 確率変数であると考えられる——簡単のため, Y は平均 σ の指数分布に従うものとする. すなわち, 分布関数:

$$\Pr\{Y \leq y\} = H(y) = \begin{cases} 1 - \exp[-y/\sigma] & y \geq 0, \\ 0 & y < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

をもつ. 材料に与えられるエネルギーのうち, ある特定の値 Q 以下のものは熱エネルギー, あるいは運動エネルギーとして費やされ, 疲労現象に寄与しないが, Q をこえたエネルギーは転位の形で, 歪エネルギーとして蓄積され, それが疲労損傷になると考えられる. 以後, $Y > Q$ という事象を A と呼ぶことにする.

事象 A が起こる確率は $\exp[-Q/\sigma]$ であるから, 引き続いて事象 A が起こる平均時間間隔 $1/\lambda$ は

$$1/\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \exp[Q/\sigma] \quad (2.2)$$

である. 初期硬化が飽和した段階では, σ は時間によらず一定であり, 事象 A はランダムにしかもときどき起こるので, 近似的にパラメータ λ のポアソン過程に従って起こると仮定できる. そして蓄積されたエネルギーは転位どうしの相互消滅などにより, 減衰パラメータ $\alpha = \alpha_0 \omega$ で指数関数的に減少していくものとする. それ故, 損傷は蓄積と減少とを繰返し, 平均として次第に累積していく. そして, その累積値がある値 U をはじめてこえた時, すべり帯き裂が発生する考える.

以上のような仮定に基づいて, き裂発生までの平均時間 \bar{T}_i は $\ell = \lambda/\alpha$ の整数

2. 疲労き裂発生

値に対して

$$\bar{T}_i = \frac{1}{\lambda} F_\ell(U/\sigma) \quad (2.3)$$

として与えられる。(2.3) 式中のパラメータ ℓ は σ にも依存する。したがって、き裂発生までの平均寿命 \bar{N}_i は (2.2), (2.3) 式を用いて

$$\bar{N}_i = \frac{\bar{T}_i}{2\pi/\omega} = \exp[Q/\sigma] F_\ell(U/\sigma), \quad (2.4)$$

ここで

$$F_\ell(U/\sigma) = 1 + U/\sigma + \frac{(U/\sigma)^2}{2(\ell+1)} + \frac{(U/\sigma)^3}{3(\ell+1)(\ell+2)} + \cdots, \quad (2.5)$$

$$\ell = \frac{1}{2\pi\alpha_0} \exp[-Q/\sigma]. \quad (2.6)$$

関数 $F_\ell(U/\sigma)$ の導出は「付録 A」に与えられている。 ℓ が整数でない場合は内挿によって求められる。しかし、き裂発生限界附近を除けば、 $\alpha = 0$ ，すなわち、 $\ell = \infty$ とおけるので、その場合の平均寿命 \bar{N}_i は

$$\bar{N}_i = \exp[Q/\sigma](1 + U/\sigma) \quad (2.7)$$

と書ける (付録 A 参照)。

(2.7) 式中の σ, Q, U は以下のようにして求められる。

まず、1 サイクルあたりに材料内に蓄えられる単位体積当たりの平均エネルギー σ を求める。繰返し応力 $S \sin \omega t$ が材料に与えられたとき、繰返し歪 $\varepsilon \sin(\omega t - \phi)$ が生じるから

$$\begin{aligned} \sigma &= \oint S \sin \omega t \cdot d(\varepsilon \sin(\omega t - \phi)) \\ &= \frac{S^2}{E} \pi \sin \phi \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.2. き裂発生の確率モデル

として求められる。ただし、 ε は歪振幅、 ϕ は内部摩擦による位相の遅れ、 E は弾性係数である。

次に、 Q を定義するために、単位体積当たりの転位増殖源の数 $n(S)$ を求める。

材料内の転位はその上にランダムに位置している不純物や転位林によって、動きを阻まれ、多くの転位セグメントにわけられる。繰返し応力が材料に加えられたとき、付与されるエネルギーはすべての転位増殖源のそれぞれに等分配されるとする。そして転位セグメントのある部分は、転位増殖源として新しい転位を増殖し、この過程を通じて、セルと呼ばれる微視組織が作られると考えられる。それ故、形成されるセルの大きさは、初期の転位分布や密度に依存すると考えてよい。転位をロックしている点は、転位線上にランダムに位置し、互いに無関係であるから、転位セグメントの長さ L は指数分布にしたがう確率変数であると考えられる。 L の平均を ℓ_0 とする。

さて、転位の線張力と転位に働く外力との釣り合いから、応力 S のもとでは

$$\ell_c = \delta Gb/S \quad (2.9)$$

という長さ以上の転位セグメントだけが増殖できる。ここで、 b はバーガース・ベクトルの大きさ、 G は剛性率、 δ はオーダー1の定数である。そこで応力 S が加えられたとき、ある一つの転位セグメントが増殖しうる、すなわち、転位増殖源として活動しうる確率は

$$\kappa \Pr\{L > \ell_c\} = \kappa \exp[-\ell_c/\ell_0] \quad (2.10)$$

となる。

κ は加えられた応力に対して、考えている転位セグメントが動きやすい配位にある確率である。したがって、初期状態での転位密度を ρ_0 とすると、単位体

2. 疲労き裂発生

積当たりの転位セグメントの平均値は ρ_0/ℓ_0 と考えてよいから，活動できる転位増殖源の単位体積当たりの平均数 $n(S)$ は

$$n(S) = \frac{\kappa\rho_0}{\ell_0} \exp\left[-\frac{\ell_c}{\ell_0}\right] = \frac{\kappa\rho_0}{\ell_0} \exp\left[-\frac{\delta Gb}{\ell_0 S}\right] \quad (2.11)$$

となる．

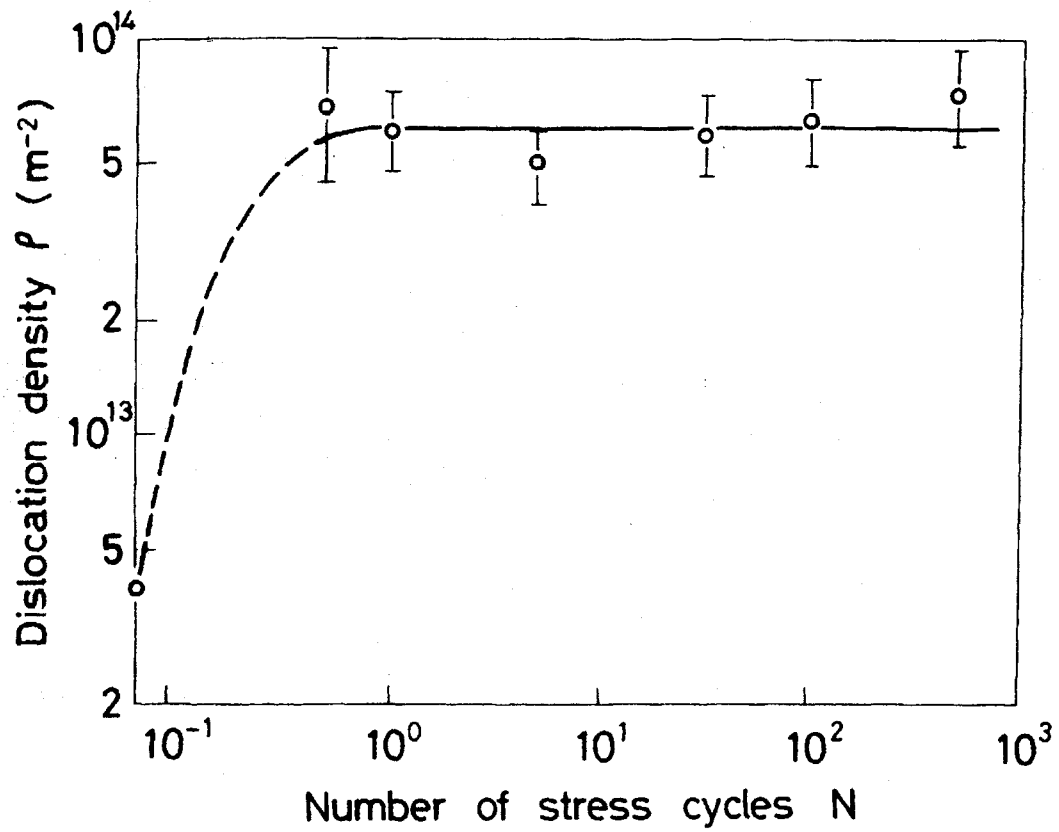


Fig.2.1: Dependence of the dislocation density on stress cycle number⁽⁵⁾.

2.2. き裂発生確率モデル

Q は $n(S)$ を用いると、以下のように定義されるが、われわれは初期硬化が飽和した段階でのモデルを提案しているので、(2.11) 式中の ρ_0 としては、転位の飽和密度 ρ_Q を用いるのが適当であると考え (図 2.1 参照). ρ_Q は与えられた応力振幅 S に依存することが知られている⁽⁶⁾.

$$S = S_0 + \alpha_1 Gb \sqrt{\rho_Q}, \quad (2.12)$$

ここで、 S_0 は等価摩擦応力、 α_1 は転位硬化係数である。したがって

$$Q = Q_0 n(S) = \kappa G b^2 \ell_c \frac{\rho_Q}{\ell_0} \exp \left[-\frac{\delta G b}{\ell_0 S} \right], \quad (2.13)$$

ここで、 Q_0 は増殖源としての転位セグメントの弾性エネルギーで

$$Q_0 = G b^2 \ell_c \quad (2.14)$$

である。したがって、 Q は単位体積当たりの増殖源としての転位セグメントの弾性エネルギーである。

さらに、 U はき裂発生時の転位密度 ρ_U を用いて、次のように定義される。

$$U = \frac{\rho_U}{\rho_Q} Q = \kappa G b^2 \ell_c \frac{\rho_U}{\ell_0} \exp \left[-\frac{\delta G b}{\ell_0 S} \right]. \quad (2.15)$$

すなわち、 U はき裂発生時の単位体積当たりの蓄積エネルギーである。

さて、繰返し応力の下で、セル内で増殖した転位は、すべり面上を移動し、セルの内側に沿って蓄積する。なぜなら、入込み、突出しやセル壁は転位の移動を妨げるからである。しかし、同符号をもった転位は強い反撥力を生じるため、蓄積することは難しい。そこで、二枚の極めて近接した面上を移動する異符号の転位双極子を転位増殖源として用いることにする⁽⁷⁾。その場合は、反撥力は相殺され、転位がセルの内側に蓄積することが可能になる。

2. 疲労き裂発生

われわれのモデルでは，累積したエネルギーがはじめて U をこえたとき，すべり帯き裂が発生すると考えている．すなわち，セルの内側のすべり面上で，転位の増殖によって累積したエネルギーが，セルの周囲に沿って蓄積した m 個の転位のエネルギーに等しく，かつ材料の表面上にあるセル壁に沿って蓄積した転位のエネルギーが長さ $d(S)$ ，深さ a のき裂の表面エネルギーの二倍に等しくなったときに，き裂が発生するのである．ここで，発生したき裂の材料表面での長さはセルの大きさ $d(S)$ である(図 2.2 参照)．

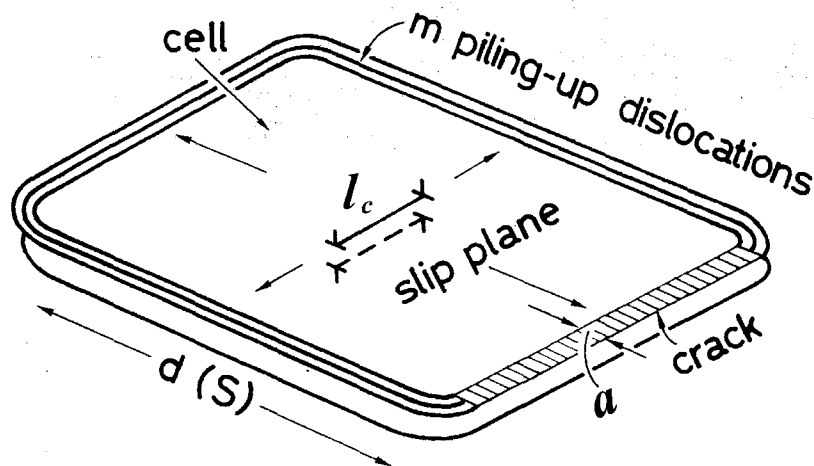


Fig.2.2 : An arrangement of dislocations piled up along the cell side on one slip plane. Note that only one of two kinds of dipole dislocation pair is shown.

2.2. き裂発生確率モデル

すなわち、以下の二つの式が成立する.

$$\kappa G b^2 \ell_c \rho_U \exp \left[-\frac{\delta G b}{\ell_0 S} \right] d(S)^2 \cong 4 \lambda m G b^2 d(S), \quad (2.16)$$

および

$$m G b^2 d(S) = 2 \gamma_s a d(S), \quad (2.17)$$

ここで、 γ_s は材料の表面エネルギーであり、 a はき裂深さ、 λ は1のオーダーの定数である。(2.16), (2.17) 両式から

$$\kappa G b^2 \ell_c \rho_U \exp \left[-\frac{\delta G b}{\ell_0 S} \right] d(S) = 8 \lambda \gamma_s a \quad (2.18)$$

が得られるが、セルの大きさ $d(S)$ は次のようにして求められるので、この式からき裂深さ a が求まる。 $d(S)$ は(2.11)式の $n(S)$ を用いて、次のようにして得られる。 $n(S)$ は活動できる転位増殖源の単位体積当たりの平均数であるから、活動できる転位増殖源相互の平均距離は

$$\left(\frac{1}{n(S)} \right)^{1/3} = \left(\frac{\ell_0}{\kappa \rho_0} \right)^{1/3} \exp \left[\frac{\delta G b}{3 \ell_0 S} \right] \quad (2.19)$$

である。形成された微視組織セルの大きさは活動する転位増殖源どうしの平均距離に対応するので、セルの平均径 $d(S)$ は(2.19)式の $[1/n(S)]^{1/3}$ に比例すると考えられる。すなわち

$$d(S) = \beta \left(\frac{1}{n(S)} \right)^{1/3} = \beta \left(\frac{\ell_0}{\kappa \rho_0} \right)^{1/3} \exp \left[\frac{\delta G b}{3 \ell_0 S} \right] \quad (2.20)$$

となる。 β は定数である。いくつかの材料に繰返し応力が加えたときに形成されたセルの大きさの測定値⁽⁸⁾⁽⁹⁾と(2.20)式の結果とを比較する。

2. 疲労き裂発生

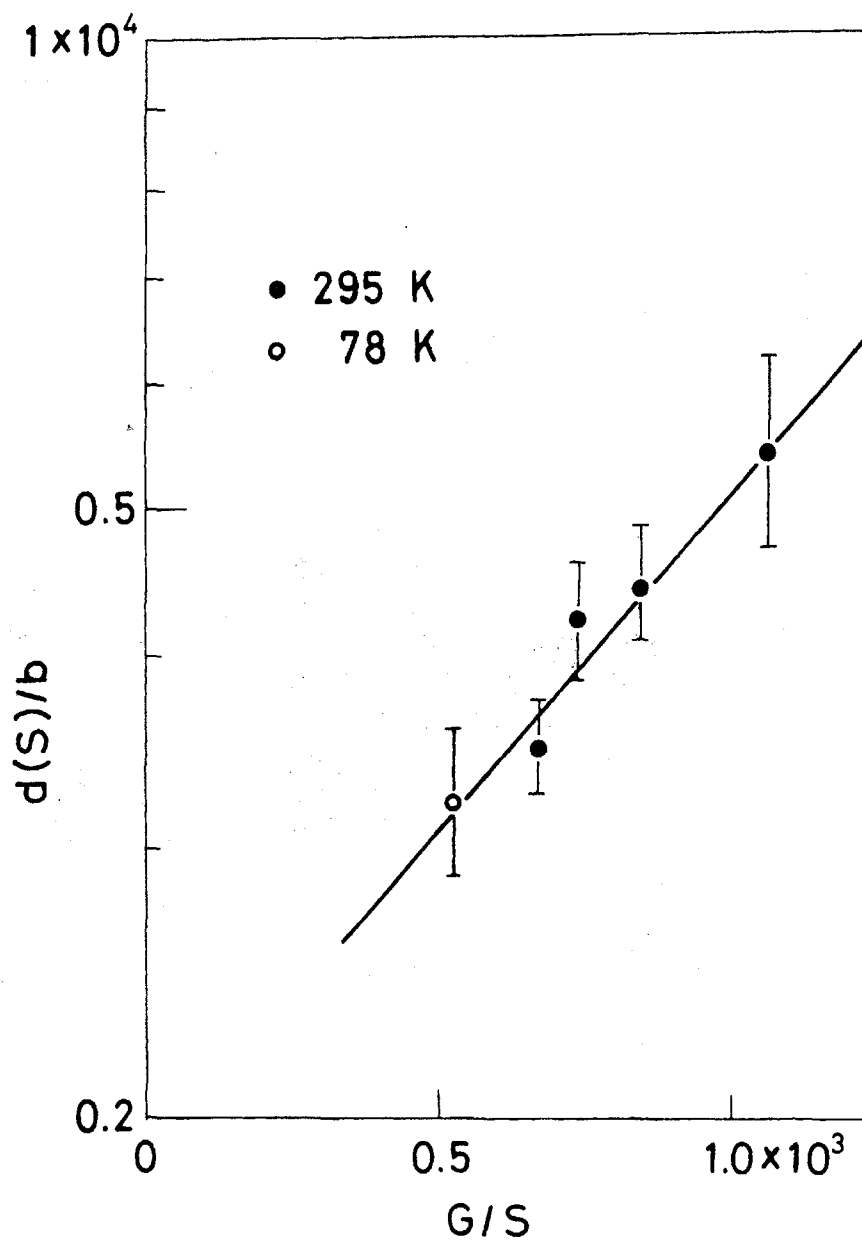


Fig.2.3 : Cell size $d(S)$ of copper formed under a cyclic stress⁽²⁾ and which originates from the experimental data shown in Ref.(8).

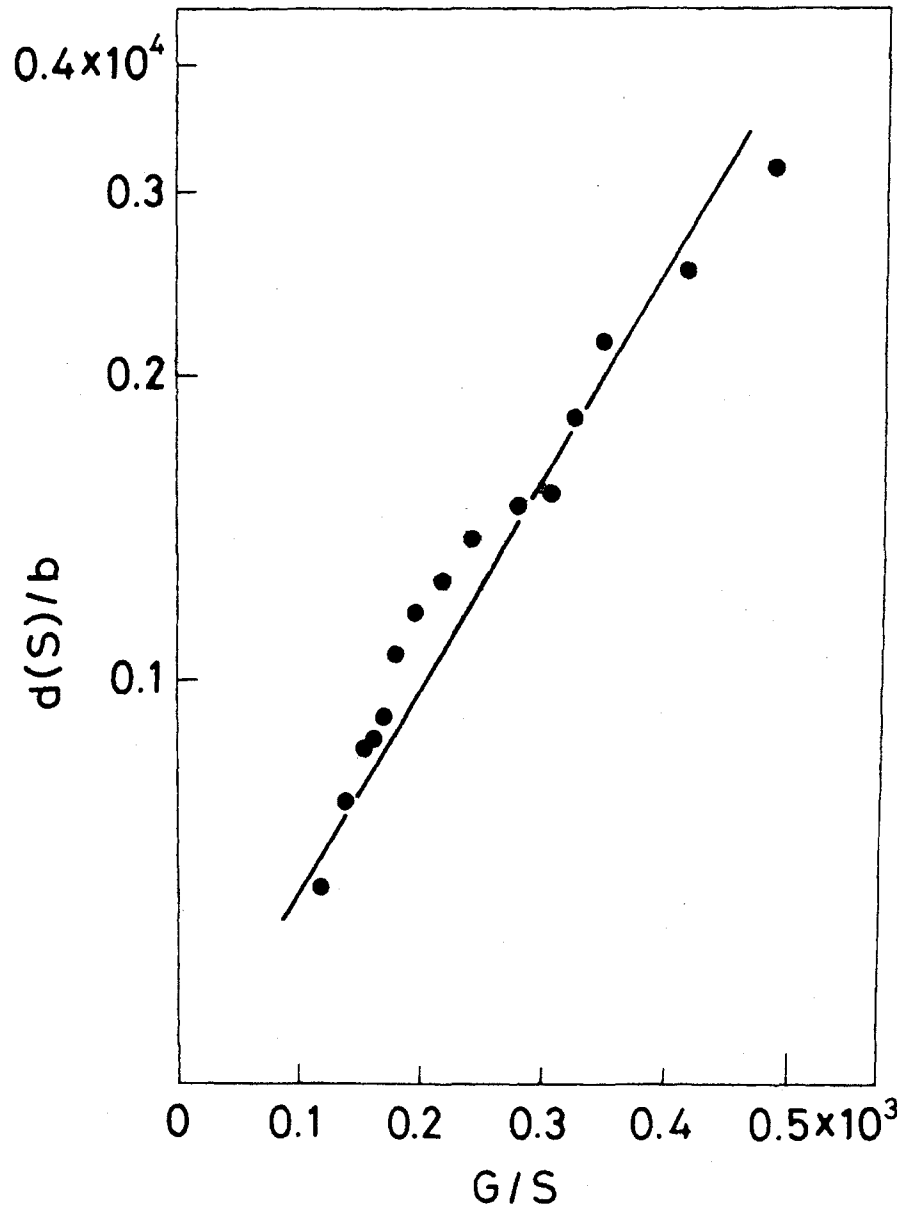


Fig.2.4: Cell size $d(S)$ of 0.007% C Fe formed under a cyclic stress⁽²⁾ and which originates from the experimental data shown in Ref.(9).

2. 疲労き裂発生

図 2.3, および図 2.4 には $\log d(S)$ が $1/S$ の関数として, プロットされている. これらのグラフで測定値は直線になっていると考えてよいので, セルの大きさの応力依存性は (2.20) 式によってよく表されていると思われる.

最後に減衰パラメータ $\alpha = \alpha_0 \omega$ の α_0 を求める. これは (2.5) 式の $F(U/\sigma)$ を考慮することから得られる. (2.4)~(2.6) 式は $x \equiv U/\sigma, A \equiv \rho_U/\rho_Q$ を用いて, 以下のように書ける.

$$\bar{N}_i = \exp[x/A] F_\ell(x), \quad (2.4')$$

$$F_\ell(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2(\ell+1)} + \frac{x^3}{3(\ell+1)(\ell+2)} + \cdots, \quad (2.5')$$

$$\ell = \frac{1}{2\pi\alpha_0} \exp[-x/A]. \quad (2.6')$$

疲労限は $F(x) \gg 1 + x$ の時に現れる. $F_\ell(x)$ の導関数は

$$\frac{dF_\ell(x)}{dx} = 1 + \frac{x}{\ell+1} + \frac{x^2}{(\ell+1)(\ell+2)} + \cdots, \quad (2.21)$$

ここで, $\ell, x \gg 1$ である. したがって

$$\frac{x}{\ell+1} < 0.1 \text{ の時} \quad \frac{dF_\ell(x)}{dx} \approx 1.$$

すなわち, $F_\ell(x) \approx 1 + x$. しかし, $x/(\ell+1) \gg 1$ の時, $F_\ell(x)$ は突然大きくなる. それ故

$$\begin{aligned} 1 &\approx \frac{x+1}{\ell} = 2\pi\alpha_0 \exp\left[\frac{x}{A}\right] (1+x) \\ &= 2\pi\alpha_0 \bar{N}_i(S_w), \end{aligned}$$

ここで, $\bar{N}_i(S_w)$ は指数減衰がない場合のき裂発生に対する疲労限 S_w に対する平均寿命である. したがって

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi \bar{N}_i(S_w)} \quad (2.22)$$

2.2. き裂発生確率モデル

が得られる。 S_w に対しては実験値を用いる。

かくして、(2.8), (2.13), (2.15) 式, および (2.22) 式を用いて, (2.4)~(2.6) 式からき裂発生までの平均寿命 \bar{N}_i を求めることができる。材料表面上のき裂の深さ, および大きさは, それぞれ (2.18), (2.20) 式を用いて計算できる。

2. 疲労き裂発生

2.3 計算結果と実験との比較

ここでは、われわれのモデルによる計算結果が、結晶粒径 d_g の異なる三種類の低炭素鋼 S20C を用いた疲労き裂発生寿命の実験結果⁽⁴⁾と比較される。以後、平均結晶粒径 $d_g = 7.8\mu\text{m}$, $20.5\mu\text{m}$, $55\mu\text{m}$ の各材料をそれぞれ A, B, C と呼ぶことにする。

材料の化学的性質、および機械的性質は、それぞれ表 2.1, 2.2 に示す。

Table2.1 : Chemical composition (Wt%).

C	Si	Mn	P	S	Cu	Ni	Cr	Mo	V	N
0.20	0.26	0.92	0.11	0.15	0.02	0.01	0.01	0.01	<0.01	0.009

Table2.2 : Heat treatment condition and mechanical properties of materials.

Material	Heat-treatment post machining	Grain size d (μm)	Yield strength σ_Y (MPa)	Tensile strength σ_B (MPa)
A	Annealed at 900°C for 10 min followed by air cooling	7.8	366	528
B	Annealed at 1000°C for 1 hr followed by furnace cooling	20.5	275	466
C	Annealed at 1200°C for 5 hr followed by furnace cooling	55	194	433

2.3. 計算結果と実験との比較

簡単のため、われわれは $\beta \sim \delta \sim \kappa \sim \lambda \sim 1$ ととる. 一方, $E = 2.13 \times 10^5 \text{MPa}$, $G = 8.19 \times 10^4 \text{MPa}$, $b = 2.5 \times 10^{-10} \text{m}$, $\gamma_S = 2 \text{J/m}^2$ が与えられる. また, 図 2.1 からわかるように, $\rho_0 = 1.0 \times 10^{12} \text{m}^{-2}$ ととる. ρ_Q は (2.12) 式で, $S_0 = 63 \text{MPa}$, $\alpha_1 = 0.82$ として, 表 2.3 のように与えられる.

Table2.3: The value of physical quantities which depend on the value of S .

S (MPa)	ρ_Q (m^{-2})	ℓ_C (m)	ϕ ($^\circ$)
200	6.6×10^{13}	1.00×10^{-7}	3.45
160	3.4×10^{13}	1.28×10^{-7}	2.43
110	7.7×10^{12}	1.86×10^{-7}	1.11

今, $\ell_0 = 1.45 \times 10^{-7} \text{m}$ (ℓ_C の平均値をとる), $\rho_U = 2.26 \times 10^{16} \text{m}^{-2}$, $\phi(S)$ を表 2.3 のようにとると, S - \bar{N}_i 曲線の直線部分が得られる. $S_W = 107 \text{MPa}$ (実験値) とすると, $\bar{N}_i(107 \text{MPa}) = 2.80 \times 10^6$ が得られるので, (2.22) 式より $\alpha_0 = 5.7 \times 10^{-8}$ が得られる.

かくして, き裂発生までの, 疲労限を有する平均寿命 \bar{N}_i は図 2.5 のように得られる.

2. 疲労き裂発生

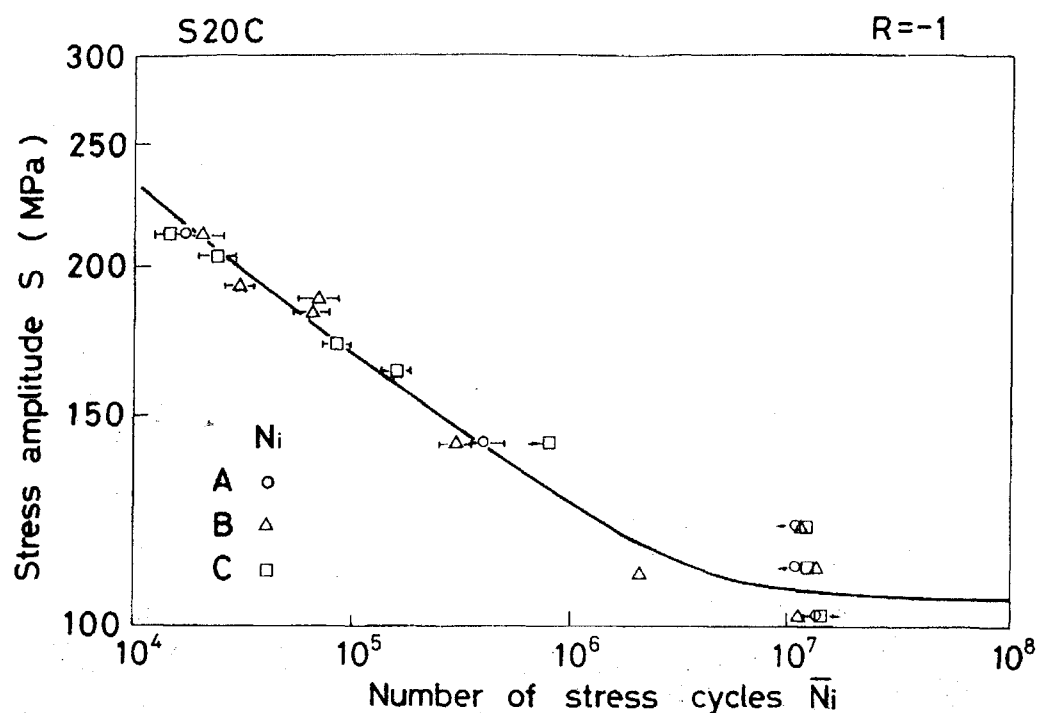


Fig.2.5 : Mean fatigue lives up to crack initiation versus stress amplitudes according to our model.

次に $\rho_0 = 1 \times 10^{12} \text{m}^{-2}$ として、セルの平均的な大きさ $d(S)$ を計算すると、表 2.4 のようになる。それらの値は 0.007% 含有の炭素鋼⁽⁹⁾ に対する実験値 $d(200\text{MPa}) = 0.72 \times 10^{-6} \text{m}$, $d(160\text{MPa}) = 0.94 \times 10^{-6} \text{m}$ と比較して、妥当であると思われる。前述のように、セルの大きさは材料表面に発生したき裂の大きさに等しく、またき裂の深さ $a(S)$ は表 2.4 の $d(S)$ の値を用いて、(2.18) 式から得られる。これも表 2.4 に示される。き裂の長さ、および深さは、実験値⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾

2.3. 計算結果と実験との比較

と比べて妥当であると思われる。 ϕ は実験値が再現できるように決定されるが、その大きさ、および S 依存性はほぼ妥当と思われるが、より多くの実験データから、さらに検討を加えるべきであると思われる。

Table2.4 : The calculated values based on our model.

S (MPa)	\bar{N}_i	$d(S)$ (m)	a (m)	m
200	3.03×10^4	0.66×10^{-6}	0.23×10^{-6}	180
160	1.55×10^5	0.70×10^{-6}	0.27×10^{-6}	205
110	2.33×10^6	0.81×10^{-6}	0.31×10^{-6}	234

最後に今一つ注意すべきことは、この章で用いられている ρ_U はき裂発生時における転位密度であるが、次章に現れる ρ_U^* はき裂発生時における転位双極子密度であるので、 $\rho_U^* = 2\rho_U$ になっている。この章でも ρ_U^* を採用することも可能で、その場合には発生するき裂が二枚の極めて近接したすべり面上にそれぞれ一つずつ、計二つのき裂が同時に発生することになる。き裂の大きさや深さは同じであるから、結果には影響はない。ただ、発生機構の説明には、 ρ_U の方が簡明であるので、その方を選んだ。

2. 疲労き裂発生

2.4 結言

疲労き裂発生に対する確率論的損傷累積モデルを提案して、これを低炭素鋼の高サイクル疲労に適用し、き裂発生機構を明らかにした。その結果、き裂発生寿命、き裂の大きさ、深さが理論的に求められ、これによって実験結果を再現しうることを示した。以上の過程に含まれる注目すべき事項は、次の通りである。

先ず、われわれのモデルは、次のような著しい特徴をもっている。

(1)：疲労き裂は転位の増殖を含む動的な過程を通じて発生するが、われわれの確率過程モデルは、この動的過程を取扱うのに適している。

(2)：疲労き裂の形成は、塑性変形の結果としてではなく、セル壁に沿って累積した転位群からき裂表面へとエネルギーが形を変えて伝わる結果として生じる。

次に、疲労現象はミクロ領域からマクロ領域にわたる現象であって、すべり帯き裂の発生は、ミクロ領域とマクロ領域の接点である。そして、この現象の主役を演じる転位は、ミクロ領域からメゾ領域にまたがる線状の格子欠陥であるから、発生したき裂は、セル程度のすべり帯き裂で、結晶粒径には無関係である。したがって、1結晶粒程度のき裂発生寿命は、粒径が異なると、大いに異なるのに対して、すべり帯き裂の発生寿命は粒径の大小に無関係で、すべて同じである。

以上のことから、き裂発生を次のように証明できる。

2.4. 結言

繰返し応力により，材料にマクロ的に与えられたエネルギーがミクロの転位を動かし，転位の増殖機構を作動させることにより増殖した転位が転位群としてミクロ的に累積し，それらの累積した転位群のもつエネルギーが表面エネルギーに形を変え，マクロのき裂を発生させる．これがき裂発生を経緯である．

なお，ここではき裂発生に対する疲労限は理論的には求められていない．これは次の重要な研究課題である．

2. 疲労き裂発生

参考文献

- (1) T.Yokobori, *Strength, Fracture and Fatigue of Metals*,
Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1965.
- (2) C.Ihara and T.Tanaka, *Fatigue Fract.Engng.Mater.Struct.*,
23(2000) 375-380.
- (3) A.Tsurui and S.Osaki, *Stochastic Process and Their Applications*,
4(1976) 79-88.
- (4) S.Taira, K.Tanaka and M.Hoshina, *ASTM STP*, **675**(1979) 135-173.
- (5) P.Lukáš, M.Klesnil and P.Ryš, *Z.Metallkde*, **56**(1965) 109-113.
- (6) V.M.Goritskiy, V.S.Ivanova and L.G.Orlov, *Phys.Met.Metall.*,
35(1973) 158-164.
- (7) K.Tanaka and T.Mura, *Trans.ASME, J.Appl.Mech.*, **48**(1981) 97-103.
- (8) J.E.Pratt, *Acta Met.*, **15**(1967) 319-327.
- (9) G.Lanford and M.Cohen, *Trans.Am.Soc.Metal*, **62**(1969) 623-638.
- (10) C.V.Cooper and M.E.Fine, *Scripta Metall*, **18**(1984) 593-596.
- (11) A.Hunsehe and P.Neumann, *Acta Metall*, **34**(1986) 207-217.
- (12) Y.Nakai, *Mater.Sci.Res.Int.*, **7**(2001) 73-81.

3.1 緒言

約 20 年前，われわれは疲労き裂伝ばに対する確率論的損傷累積モデルを提案した⁽¹⁾．そのモデルは Oh によって提案された最弱リンクモデル⁽²⁾に端を発する．

Oh のモデルでは，き裂先端から前方に一系列に並んだ材料の微小な要素に，繰返し応力のもとで損傷が累積すると考える．そしてある要素に累積した損傷が許容値をこえると，その要素は破壊し，き裂はその破壊した要素まで進むとした．さらに，要素の強度は確率変数とし，その分布関数は適当に仮定され，その結果，き裂伝ばのべき乗則が導かれた．

しかしながら，彼のモデルにはいくつかの不自然な取扱いがなされている．すなわち――

(1)：き裂が 1 回伝ばするのに必要な繰返し数が，数回の場合でも繰返し数を連続値としていること．

(2)：分布関数の漸近形が要素の大きさに比例するとした後，要素の大きさを 0 に移行し，そのため伝ば速度が発散するという結果が現

3. 疲労き裂伝ば

れる.

そこで、これを修正するために、鶴井ら⁽³⁾は、繰返し数は離散値のままとし、要素の大きさも極限移行しない確率論的モデルを提案した。しかし、このモデルでも、Ohのモデルと同様、分布関数の関数形は適当に仮定され、何らかの物理的な観点から導かれたものではなかった。

そこで、前述の論文では、各要素の強度の分布関数を、き裂発生モデル⁽⁴⁾と同様に、転位の増殖によって損傷が累積し、それがある許容値をこえると破壊が生じる、という転位増殖モデルから導く。その上、き裂先端の塑性域内では、転位の増殖によってすべり帯が生じ、それらが交差することによりき裂先端付近に疲れ損傷が著しく累積した領域ができるが、その領域は2次元的な拡がりをもつので、前論文⁽³⁾で提案された1次元モデルを2次元に拡張した。かくして

-
- (1)：き裂伝ば速度が応力拡大係数のべきに比例するという結果が導かれ、同時に
 - (2)：き裂の1回に進む距離、および
 - (3)：き裂が1回進むのに要する繰返し数などが求められ、ストライエーションの発生が理論的に導かれることが明らかになった。

しかし、このモデルも一つの数学的モデルであって、その中で用いられたパラメータの物理的意味が十分に明らかにされることなく、また当時、き裂伝ば過程の破面観察などから、き裂の伝ば機構を模式的に表したものはあったが⁽⁵⁾⁽⁶⁾、き裂先端付近のすべり変形の詳細を示すようなものはなく、われわれのモデルもその後、手を着けないままであった。

ところが最近、この二つに進展がみられた。その一つは疲労き裂発生に対する確率論的損傷累積モデルの物理的意味が明らかになった⁽⁷⁾ ことである。すなわち――

- (1): 疲労損傷は転位の形で累積される。
- (2): き裂発生時のエネルギーが転位密度を含む形で表される。
- (3): き裂発生までの過程はミクロ現象で、すべり帯き裂の発生がミクロ領域とマクロ領域の接点である、ということである。

さらに、実験的には次のような進展が見られた。すなわち、菅田ら⁽⁸⁾ が **mode I** で伝ばする疲労き裂先端近傍の材料表面を原子間力顕微鏡 (AFM) により観察し、き裂先端近傍のすべり変形と疲労き裂の伝ば挙動の関係を考察した。それによると

- (1): 疲労き裂縁から多数のすべり線が発生しているが、すべり線はき裂先端より後方のみが発生し、き裂先端で交差する二つのすべり系が荷重 1 サイクル中に作動することにより、き裂は伝ばする。
- (2): 負荷過程では、直前の除荷過程で閉口したき裂の先端よりすべりが作動し、閉口している部分が再び開口をはじめる。そして、前回の最大負荷時のき裂先端まで開口した後、さらに前方にすべりが生じることにより、新しくき裂が開口、伝ばする、などが明らかになった。

以上の事情を踏まえて、この章では、伝ばモデル中のパラメータに転位論に基づく物理的意味を付与し、これを用いて菅田ら⁽⁸⁾ の観察結果と矛盾しないよ

3. 疲労き裂伝ば

うな **mode I** 疲労き裂の伝ば機構を提案したい⁽⁹⁾. $\Delta K_{\text{eff th}}$ もエネルギー的立場から計算され, また, 塑性域の大きさも転位との関係から求められた.

3.2 疲労き裂伝ばモデル

ここでは、前述のモデル⁽¹⁾で、き裂伝ば機構を説明するため、モデルの基本的な形を述べるとともに、パラメータに物理的な意味を与える。

繰返し応力のもとでは、き裂先端の塑性域では転位増殖源が活動し、多くのすべり帯ができる。このようなすべり帯の交差によって、き裂先端近傍には、疲労損傷の著しい領域が現れる。この領域を、領域Dと名付ける。領域Dの外側においては損傷の蓄積は小さいと考えられる。

さて、図3.1に示すように、領域Dをも含めて、き裂先端付近は大きさ d_0 の小さな要素に分割されているものとする。図3.1で、き裂先端を原点とし、き裂の主な伝ば方向を x 軸の正の向きとし、それに垂直に z 軸を決める。原点から x 方向にかぞえて、 i 番目($i = 1, 2, \dots, i_0$)、 x 軸から z 軸の正の方向に j 番目($j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j_0$)にあたる要素を (i, j) 要素と呼ぶことにする。各要素はそれぞれ固有の強度をもっており、それは確率変数であると考えられる。 (i, j) 要素の強度を $H(i, j)$ とし、その分布関数を $H_{i,j}(h)$ とする。すなわち

$$H_{i,j}(h) \equiv \Pr\{H(i, j) \leq h\}, \quad (3.1)$$

ここで、 $H(i, j)$ は応力繰返し数を単位とする。 $H_{i,j}(h)$ の具体的な形については、後程議論する。

さて、繰返し応力のもとで、各要素には転位が増殖することによって、歪エネルギーが蓄積され、損傷が確率的に累積していく。 n サイクルが経過したときに、他のすべての要素に先駆けて、ある一つの要素 (i, j) 内に蓄積した損傷が許容限度をこえると、その要素は破壊され、き裂はその位置まで進む。すなわち、 n 回の応力繰返しで、き裂は x 方向に長さ id_0 だけ成長したことになる。

3. 疲労き裂伝ば

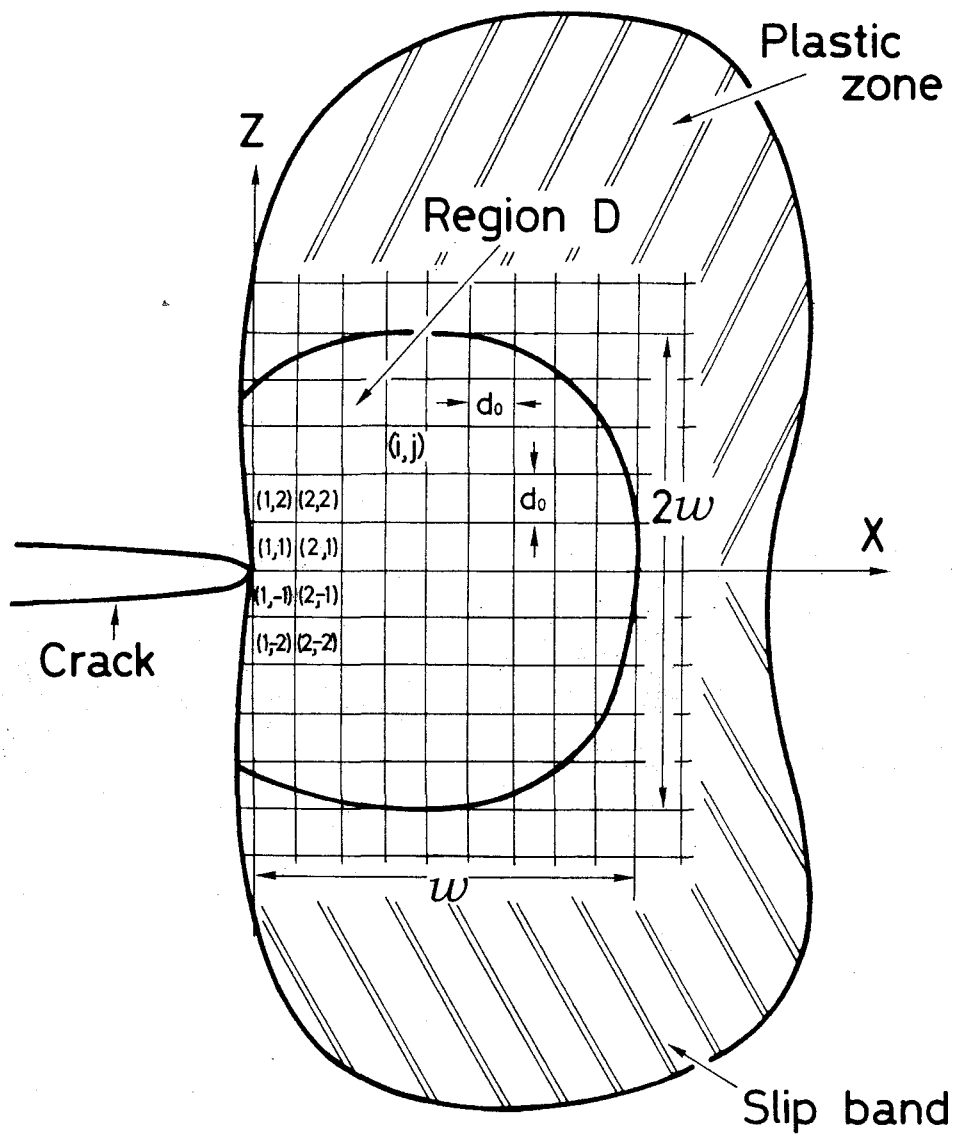


Fig.3.1 : Schematic illustration of plastic zone and region D ahead crack tip.

以上の議論によって、具体的にき裂伝ば速度を求めることにする。

先ず、 (i, j) , $(j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j_0)$ という $2j_0$ 個の要素をまとめて、第 i 列と呼ぶ。 i 列の要素の中で最弱の強度をもつ要素の強度を $Y(i)$ とすると、その分布関数は (3.1) 式を用いて

$$F_i(y) \equiv \Pr\{Y(i) \leq y\} \quad (3.2)$$

と書ける。これは i 列中の最弱の要素の強度が y サイクル以下である確率である。すなわち、これは y サイクルが経過したとき、第 i 列において少なくとも一つの要素が壊れる確率であるから、1 から y サイクル目で壊れる要素が無い確率をひけばよい。(3.1) 式から $H_{i,j}(y)$ は y サイクル以下で (i, j) 要素が壊れる確率であるから、 y サイクルで (i, j) 要素が壊れない確率は

$$\begin{aligned} \Pr\{H(i, j) > y\} &= 1 - \Pr\{H(i, j) \leq y\} \\ &= 1 - H_{i,j}(y) \end{aligned} \quad (3.3)$$

である。第 i 列中の $2j_0$ 個の要素がすべて y サイクル後に壊れない確率は

$$\prod_j (1 - H_{i,j}(y))$$

となり、(3.2) 式は

$$F_i(y) = \Pr\{Y_i \leq y\} = 1 - \prod_j (1 - H_{i,j}(y)) \quad (3.4)$$

と書ける。

次に、 N, M_n という確率変数を導入する。

$$\begin{aligned} N \equiv \{n | n-1 < Y(i) \text{ for all } i, \\ \text{and } Y(i) \leq n \text{ for at least one } i\}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} M_n \equiv \{m | n-1 < Y(i) \text{ for } i = 1, 2, \dots, m-1, \\ n-1 < Y(m) \leq n \text{ and } n < Y(i) \text{ for } i = m+1, \dots, i_0\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

3. 疲労き裂伝ば

ここで、 N はすべての要素のうち、少なくとも一つが初めて破壊されるまで、すなわち、領域 D 内で最弱の要素が破壊されときの繰返し数である。

このように、初めて要素が破壊されたとき、破壊された要素のうちで、最も大きな x 座標をもつもの、すなわち、き裂先端より x 方向に最も奥深く離れた要素までき裂は進む。ある要素の破壊が起こってから、その要素までのき裂の伝ばは急速に起こり、それに要する繰返し数は無視できるものとすれば、 N は 1 回の伝ばが起こるのに要する繰返し数である。

M_n は繰返し数が、 $n-1$ サイクルの時点ではどの列も破壊された要素がなく、 n サイクルが経過した時、 $m+1$ 列から i_0 列中には破壊した要素がない場合、壊れた要素をもつ列で、 x 軸方向にき裂先端から最も離れた列 (m 列) の m を表す。このとき 1 列から $m-1$ 列中に壊れた要素があっても差し支えない。

したがって、 $d_0 M_n$ は、初めて破壊された要素のうちで、き裂先端から x 方向に最も離れた要素の x 座標の d_0 倍である。すなわち、 $d_0 M_n$ は $N = n$ のときの 1 回の伝ばによるき裂の x 方向への伝ば量を表す。 x 方向がき裂の主な伝ば方向であるから、き裂の伝ば速度は $d_0 M/N$ という確率変数であると考えられる。実際に測定されるのはその平均値であるから、 a をき裂長さとするれば、伝ば速度 da/dn は次のように表される。

$$\frac{da}{dn} = \langle d_0 M_n / N \rangle \quad (\langle \dots \rangle \text{ は平均を表す}). \quad (3.7)$$

さて、確率変数 M_n は $N = n$ のときにだけ定義されるから、 M_n, N の同時分布

3.2. 疲労き裂伝ばモデル

は (3.4), (3.5) 式より

$$\begin{aligned}
 P(m, n) &\equiv \Pr\{M_n = m, N = n\} \\
 &= \Pr\{Y(i) > n - 1 \ (i = 1, 2, \dots, m - 1)\} \\
 &\quad \times \Pr\{n - 1 < Y(m) \leq n\} \\
 &\quad \times \Pr\{Y(i) > n \ (i = m + 1, m + 2, \dots, i_0)\} \\
 &= \prod_{i=1}^{m-1} (1 - F_i(n - 1)) \{F_m(n) - F_m(n - 1)\} \prod_{i=m+1}^{i_0} (1 - F_i(n)). \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

また, これと同様にして, N の分布は

$$\begin{aligned}
 P(n) &\equiv \Pr\{N = n\} \\
 &= \prod_i (1 - F_i(n - 1)) - \prod_i (1 - F_i(n)) \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

と書ける. したがって, き裂伝ば速度は, (3.7), (3.8) 式より

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dn} &= \langle d_0 M_n / N \rangle \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{i_0} \frac{d_0 m}{n} P(m, n) \\
 &= d_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{i_0} \frac{m}{n} \{F_m(n) - F_m(n - 1)\} \\
 &\quad \times \prod_{i=1}^{m-1} (1 - F_i(n - 1)) \prod_{i=m+1}^{i_0} (1 - F_i(n)) \\
 &= d_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{i_0} \frac{m}{n} \{F_m(n) - F_m(n - 1)\} \\
 &\quad \times \exp \left[\sum_{i=1}^{m-1} \ln(1 - F_i(n - 1)) + \sum_{i=m+1}^{i_0} \ln(1 - F_i(n)) \right]. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

3. 疲労き裂伝ば

x 軸についての和, すなわち, m に関する和を積分で近似し, また $i_0, j_0 \rightarrow \infty$ とすれば

$$\begin{aligned} \frac{da}{dn} &= d_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} dm \cdot m \{F_m(n) - F_m(n-1)\} \\ &\quad \times \exp \left[\int_0^m di \ln(1 - F_i(n-1)) + \int_m^{\infty} di \ln(1 - F_i(n)) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる. 同様にして, (3.9) 式より

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} n P(n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \prod_i (1 - F_i(n-1)) - \prod_i (1 - F_i(n)) \right\} \\ &= \prod_i (1 - F_i(0)) - \prod_i (1 - F_i(1)) \\ &\quad + 2 \prod_i (1 - F_i(1)) - 2 \prod_i (1 - F_i(2)) \\ &\quad + \cdots + n \prod_i (1 - F_i(n-1)) - n \prod_i (1 - F_i(n)) + \cdots \\ &= \prod_i (1 - F_i(0)) + \prod_i (1 - F_i(1)) + \cdots + \prod_i (1 - F_i(n)) + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_i (1 - F_i(n-1)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[\sum_{i=1}^{i_0} \ln(1 - F_i(n-1)) \right] \\ &\cong \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[\int_0^{\infty} di \ln(1 - F_i(n-1)) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

という形で求められる.

3.2. 疲労き裂伝ばモデル

また，1回の進展によるき裂の x 方向への伝ば量の平均を $\langle X \rangle$ とすると

$$\begin{aligned}
 \langle X \rangle &= \langle d_0 M_n \rangle \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{i_0} d_0 m P(m, n) \\
 &= d_0 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dm \cdot m \{F_m(n) - F_m(n-1)\} \\
 &\quad \times \exp \left[\int_0^m di \ln(1 - F_i(n-1)) + \int_m^{\infty} di \ln(1 - F_i(n)) \right] \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

となり，これは $(1/d_0) \cdot (da/dn)$ の計算で n についての和をとる部分を変えるだけで計算できる．

次に，(3.11)，(3.12)，(3.13) 式を $H_{i,j}(n)$ を用いて表す．先ず，(3.4) 式より

$$\begin{aligned}
 \ln(1 - F_i(n)) &= \ln \left[1 - \left\{ 1 - \prod_j (1 - H_{i,j}(n)) \right\} \right] \\
 &= \ln \left\{ \prod_j (1 - H_{i,j}(n)) \right\} \\
 &= \sum_j \ln(1 - H_{i,j}(n)) \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}
 &1 - \exp [\ln(1 - F_i(n)) - \ln(1 - F_i(n-1))] \\
 &= 1 - \exp \left[\ln \frac{1 - F_i(n)}{1 - F_i(n-1)} \right] \\
 &= \frac{F_i(n) - F_i(n-1)}{1 - F_i(n-1)}. \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

3. 疲労き裂伝ば

(3.14), (3.15) 式を用いると, (3.11) 式は

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{d_0} \frac{da}{dn} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} dm \cdot m \cdot \frac{F_m(n) - F_m(n-1)}{1 - F_m(n-1)} \\
 &\quad \times \exp \left[\ln(1 - F_m(n-1)) + \int_0^m di \ln(1 - F_i(n-1)) \right. \\
 &\quad \left. + \int_m^{\infty} di \ln(1 - F_i(n)) \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} dm \cdot m \\
 &\quad \times \left(1 - \exp \left[\sum_j \ln(1 - H_{m,j}(n)) - \sum_j \ln(1 - H_{m,j}(n-1)) \right] \right) \\
 &\quad \times \exp \left[\sum_j \ln(1 - H_{m,j}(n)) + \int_0^m di \left\{ \sum_j \ln(1 - H_{i,j}(n-1)) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \int_m^{\infty} di \left\{ \sum_j \ln(1 - H_{i,j}(n)) \right\} \right] \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

と表され, (3.12) 式は

$$\langle N \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[\int_0^{\infty} di \left\{ \sum_j \ln(1 - H_{i,j}(n-1)) \right\} \right] \quad (3.17)$$

となる. $\langle X \rangle$ は (3.16) 式と同様である.

da/dn , $\langle X \rangle$, $\langle N \rangle$ が (i, j) 要素の強度を表す確率変数 $H(i, j)$ の分布関数 $H_{i,j}(n)$ で表されたので, 次は $H_{i,j}(n)$ を求める.

繰返し応力のもとで, あるサイクルにおいて, (i, j) 要素に蓄積される損傷を $X(i, j)$ とする. $X(i, j)$ は転位の増殖によって蓄積されるので, 確定値ではなく, 確率変数であると考えられる. 今, 各サイクルでの $X(i, j)$ は互いに独立で, 同一分布を有するものとする. また簡単のため, き裂発生モデルと同様に, $X(i, j)$ は平均 $\sigma(i, j)$ の指数分布にしたがうものとする. すなわち, $X(i, j)$ の分布関数

3.2. 疲労き裂伝ばモデル

$G_{i,j}(x)$ は

$$G_{i,j}(x) \equiv \Pr\{X(i,j) \leq x\} = \begin{cases} 1 - e^{-x/\sigma(i,j)} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

で表される．さらに，転位の増殖が続いた後，要素に蓄積された損傷が許容値 U をこえると，その要素は破壊されるものとする．

さて，各要素の強度を考えるために，今，仮に各要素の破壊は起こっても，き裂の伝ばは起こらないものとする．なぜなら，伝ばが起こってしまうと，元のき裂先端からき裂が伝ばした位置までの要素の強度を問題にできなくなるからである．この場合，ある要素に累積した損傷が，繰返し数 $n-1$ サイクルのときに U をこえず， n サイクルのときに U をこえるものとするれば，その要素の強度は繰返し数の単位で， $n-1$ と n の間になる．(3.16)，(3.17) 式からわかるように，われわれは $H(i,j)$ の分布関数 $H_{i,j}(h)$ についてのすべてを知る必要はなく， h が整数の場合の値を知ればよい．

ところで，き裂は何サイクルかに1回ずつ伝ばする．直前の伝ばまでに確率的に累積した損傷のために，各要素の U はそれぞれ見掛け上減少したものと見做せるので，見掛け上の U は確率変数であると考えられる．また直前の伝ばまでに累積した損傷は，き裂による応力集中のため，き裂先端に近いほど平均として大きいと思われるので，見掛け上の U の平均はき裂先端に近いほど小さいと考えられる．しかし，ここでは U の見掛け上の変化は考えないことにする．すなわち，1回1回の伝ばはそれぞれ独立なものであり，それ以前の伝ばの影響を受けないことにする．

以上により， $H(i,j)$ の分布関数 $H_{i,j}(h)$ についての知識は次のようにして得られる．

3. 疲労き裂伝ば

先ず, h は繰返し数であるから, 明らかに

$$H_{i,j}(h) = 0 \quad \text{for } h \leq 0. \quad (3.19)$$

また, $h = 1, 2, \dots$ のとき

$$H_{i,j}(h) - H_{i,j}(h-1) = \int_0^U dx g(x, h-1) e^{-(U-x)/\sigma(i,j)} \quad (3.20)$$

となる. ここで, $g(x, h-1)dx$ は $h-1$ 回の繰返しで損傷の蓄積量が x と $x+dx$ の間にある確率である. (3.20) 式の左辺は (i, j) 要素の強度が $h-1$ 回と h 回の間にある確率であるから, x は当然 $0 \leq x < U$ という関係を満たす. さらに (3.18) 式より

$$\Pr\{X(i, j) \geq U - x\} = e^{-(U-x)/\sigma(i,j)} \quad (3.21)$$

であり, これは h 回目のサイクルで (i, j) 要素に $U-x$ 以上の損傷が蓄積する確率である. したがって, $g(x, h-1)dx$ と $e^{-(U-x)/\sigma(i,j)}$ を掛け合わせると, $h-1$ 回の繰返しで, (i, j) 要素に蓄積された損傷が x で, h 回目のサイクルで, (i, j) 要素の損傷が許容値 U をこえる. すなわち, (i, j) 要素が破壊される確率を表す. これを 0 から U まで積分すれば, $h-1$ サイクルでは (i, j) 要素の損傷の蓄積量が U をこえず, h サイクル目で U をこえて破壊される場合を, すべての損傷の蓄積量 x ($0 \leq x < U$) について考えたことになり, その確率 ((3.20) 式の右辺) は (3.20) 式の左辺に一致する.

次に $g(x, h)$ を具体的に求める. $h \geq 1$ のとき, $g(x, h)$ は互いに独立で同一の分布 (3.18) 式をもった h 個の確率変数の和の確率密度関数であるから

$$g(x, h) = \begin{cases} \delta(x) & \text{for } h = 0, \\ \frac{x^{h-1}}{\sigma(i, j)^h (h-1)!} e^{-x/\sigma(i,j)} & \text{for } h \geq 1 \end{cases} \quad (3.22)$$

3.2. 疲労き裂伝ぱモデル

となる. $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である (付録 B 参照). (3.22) 式を (3.20) 式に代入して, (3.19) 式を用いると

$$\begin{aligned}
 H_{i,j}(1) &= H_{i,j}(1) - H_{i,j}(0) \\
 &= \int_0^U dx g(x, 0) e^{-(U-x)/\sigma(i,j)} \\
 &= \int_0^U \delta(x) e^{-(U-x)/\sigma(i,j)} dx \\
 &= \exp \left[-\frac{U}{\sigma(i,j)} \right] \quad \text{for } h = 1,
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
 H_{i,j}(h) - H_{i,j}(h-1) &= \int_0^U dx \frac{x^{h-2}}{\sigma(i,j)^{h-1}(h-2)!} e^{-U/\sigma(i,j)} \\
 &= \frac{e^{-U/\sigma(i,j)}}{\sigma(i,j)^{h-1}(h-2)!} \left[\frac{x^{h-1}}{h-1} \right]_0^U \\
 &= \frac{U^{h-1} e^{-U/\sigma(i,j)}}{\sigma(i,j)^{h-1}(h-1)!} \quad \text{for } h = 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

(3.23) 式は, $H_{i,j}(1)$ が 1 回である要素が破壊される確率であって, それは 1 回で損傷が U をこえる確率であると考えても, $e^{-U/\sigma(i,j)}$ と求めることができる. 以上からわかるように, $H_{i,j}(h)$ は (3.19), (3.23), (3.24) 式を用いて

$$H_{i,j}(h) = \sum_{\ell=1}^h (H_{i,j}(\ell) - H_{i,j}(\ell-1)) \quad \text{for } \ell = 1, 2, 3, \dots \tag{3.25}$$

から得られるので, 後は $\sigma(i,j)$ の表式を決めさえすれば, 計算に必要な $H(i,j)$ の分布に関する情報はすべて得られることになる.

ところで, 損傷は領域 D の外部ではほとんど蓄積されず, 内部ではき裂の存在によって, き裂先端に近いほど蓄積されやすいと考えられる. したがって, 1 サイクル当たり一つの要素 (i,j) に累積する損傷の平均値 $\sigma(i,j)$ は i,j の増加と

3. 疲労き裂伝ば

ともに減少し、領域 D の外部の要素ではその値は極めて小さいものと考えられる。以上の性質を表す最も簡単な $\sigma(i, j)$ の表式として、以下のものをとることにする。

$$\sigma(i, j) = c_0 e^{-(d_0/w)i - (d_0/w)|j|}, \quad (3.26)$$

ただし、 w は領域 D の x 方向の大きさ、 $2w$ は z 方向の大きさとし、また c_0 は定数で、き裂先端に蓄積される損傷の平均を意味する。なお、この形から、き裂先端から遠く離れた要素では損傷はほとんど蓄積されず、破壊されないので、(3.11) 式を求める際に、 $i_0, j_0 \rightarrow \infty$ としたことが結果に影響しないことがわかる。

われわれのモデルに示された方法によって $(1/d_0)(da/dn)$ と w/d_0 の関係をパラメータ U/c_0 のいくつかの値に対して求めると、図 3.2 のようになる。

また、き裂が 1 回に進む平均距離 $\langle X \rangle$ 、およびき裂が 1 回進むに要する平均繰返し数 $\langle N \rangle$ と、 w/d_0 の関係をいくつかの U/c_0 の値に対して求めたのが図 3.3、図 3.4 である。

3.2. 疲労き裂伝ぱモデル

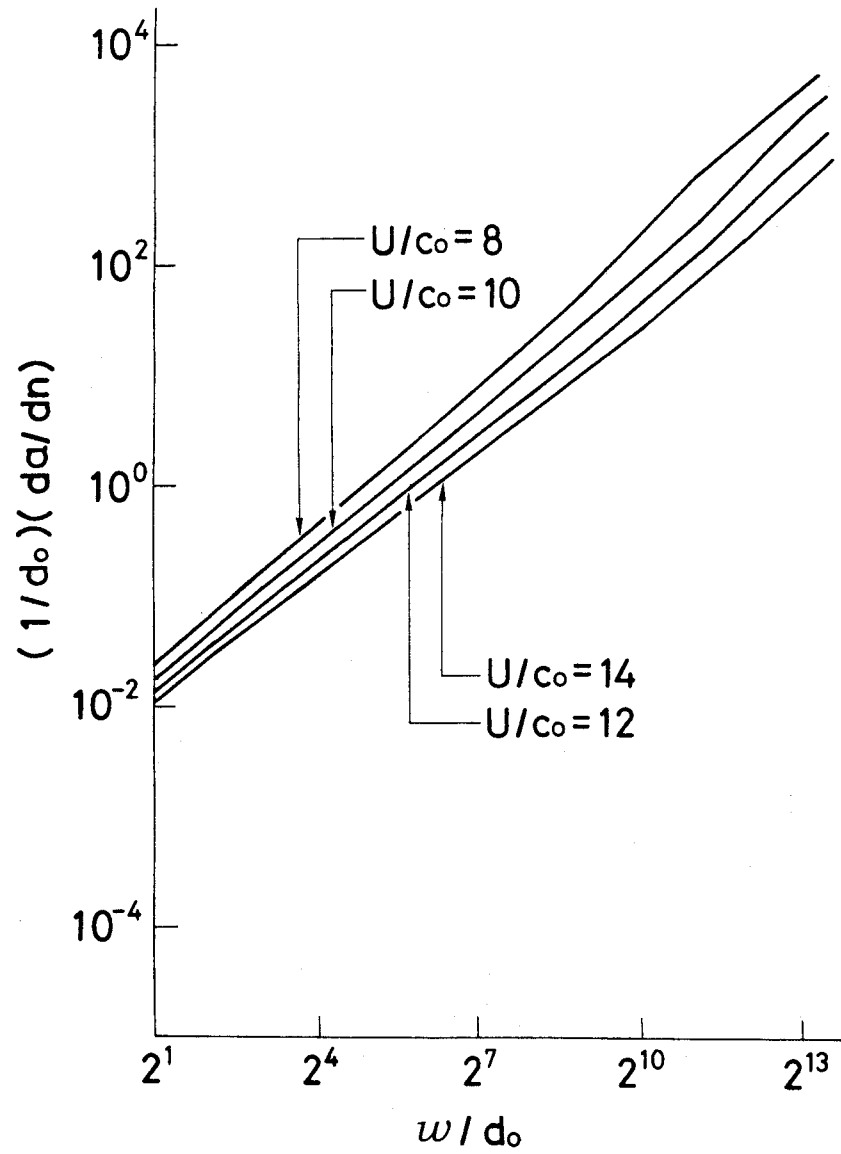


Fig.3.2 : $(1/d_0)(da/dn)$ versus w/d_0 .

3. 疲労き裂伝ば

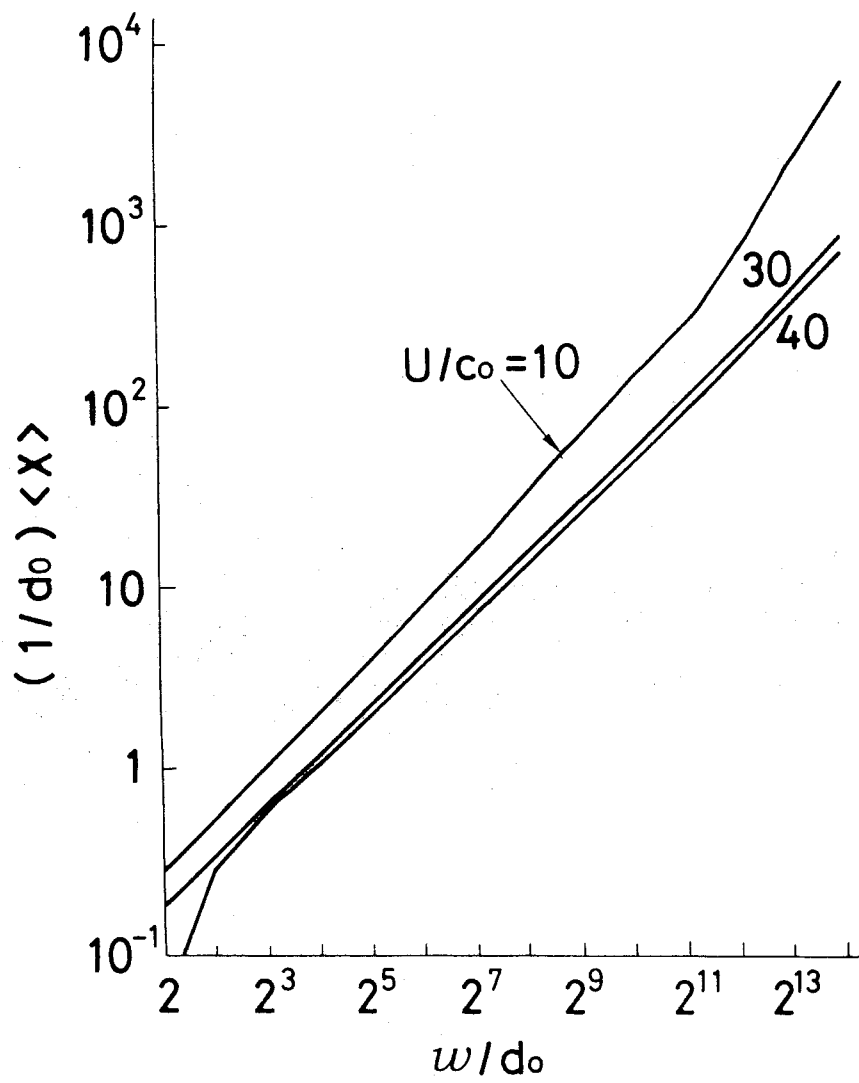


Fig.3.3 : $(1/d_0)\langle X \rangle$ versus w/d_0 .

3.2. 疲労き裂伝ばモデル

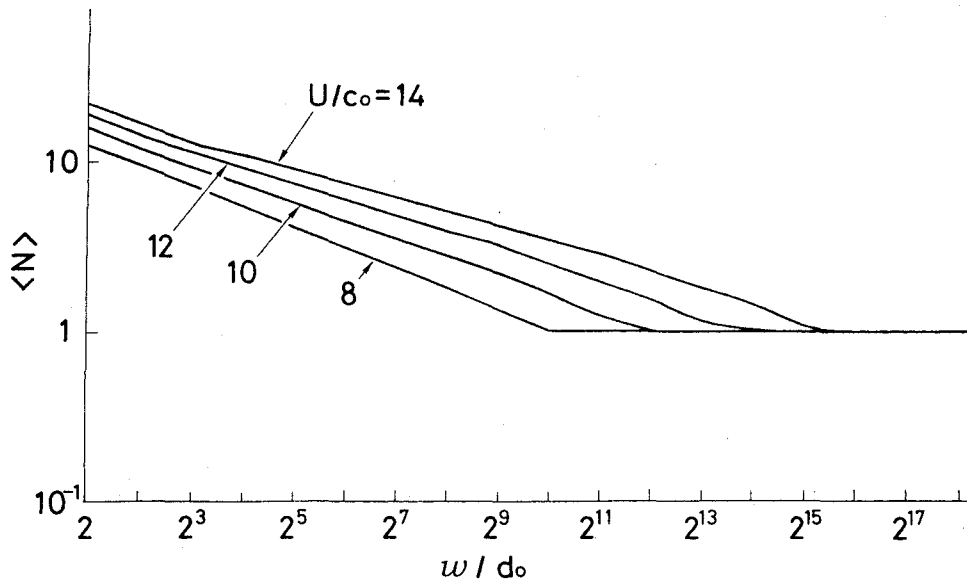


Fig.3.4 : $\langle N \rangle$ versus w/d_0 .

図 3.2 から、 U/c_0 のどの値に対しても、き裂伝ば速度が w のべきにほぼ比例することがわかる。また図 3.4 から、き裂が 1 回進むに要する平均繰返し数 $\langle N \rangle$ が w の増加とともに 1 回になり、ストライエーションが現れることが示される (付録 C 参照)。

次に、われわれの一連のモデルでは、転位が主役を演じていることから、 $d_0 = 1.3 \times 10^{-9} \text{m}$ (これは転位幅に相当する) を採用し、またき裂発生モデルにした

3. 疲労き裂伝ば

がって

$$c_0 = 2S_Y \cdot 2\varepsilon_p, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} U &= \kappa G b^2 \rho_U^* \frac{\ell_C}{\ell_0} \exp \left[-\frac{\delta G b}{\ell_0 S} \right] \Bigg|_{\substack{S=S_Y \\ \ell_0=\ell_C}} \\ &= \kappa G b^2 e^{-1} \rho_U^* \end{aligned} \quad (3.28)$$

とおく．ここで， U は要素破壊時に D 内に累積する増殖源としての転位双極子の単位体積当たりのエネルギー， G は剛性率， b はバーガース・ベクトル， ℓ_0 は転位セグメントの長さ (確率変数) の平均値， ℓ_C は増殖源としての転位セグメントの最小値

$$\ell_C = \delta G b / S, \quad (3.29)$$

ρ_U^* は要素破壊時の転位双極子密度， S_Y は降伏応力， S は応力振幅， ε_p は下降伏点到達時の塑性歪みである (δ は 1 オーダーの値)．

3.3 き裂伝ば機構

菅田ら⁽⁸⁾のAFMによる観察結果に対応するように、負荷過程(負荷開始点①から最大負荷点⑤)を点②, ③, ④で4過程[1], [2], [3], [4]に分ける。

過程[1][2][3]では直前の負荷でき裂になった部分が、負荷によって徐々に開口し、点④に到って、そのき裂先端領域Dに作用する負荷エネルギー $2w^2c_0$ によって、領域D内の損傷が空孔型転位双極子の集まりとして、 $2w^2U$ のエネルギー量に達する(図3.5(a))。

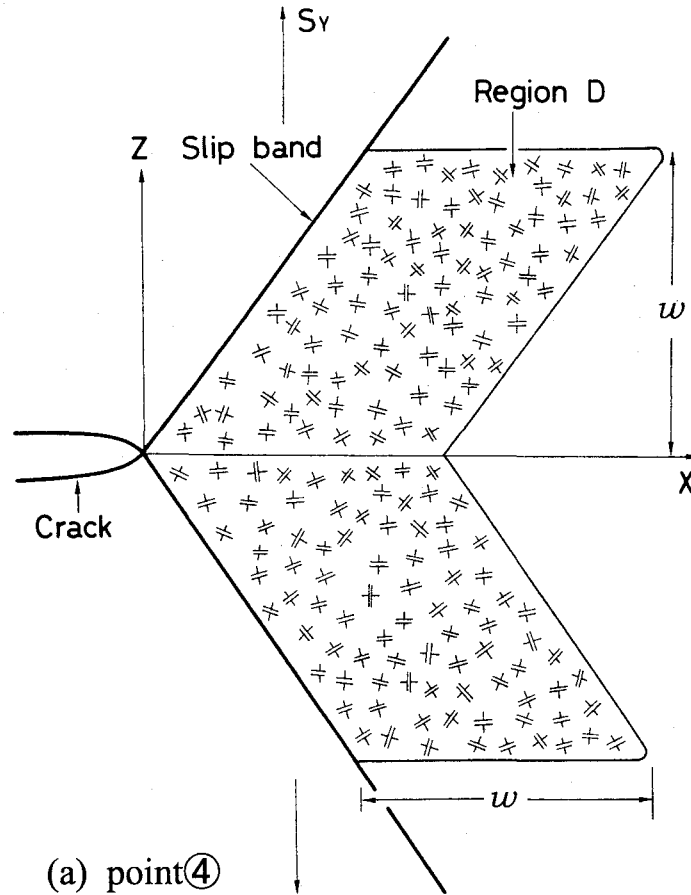


Fig.3.5: Schematic illustration of fatigue crack propagation process.

3. 疲労き裂伝ば

過程 [4] では, 図 3.5(b) のように, D 内にあるすべり線 (間隔 d_0) に沿って, 転位双極子が並ぶ. 固執すべり帯内の転位双極子の振る舞い⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾ から考えても, すべり帯内ではこのような状態が現れると思われる. なお, 前述したモデルでは 1 回に伝ばするき裂長さは平均 $\langle X \rangle$ であるから, 過程 [4] では, 点④で D 内に存在した転位双極子 ($2w^2\rho_U^*$) がすべてき裂先端から $\langle X \rangle$ の距離内で交わる上下のすべり線上に並ぶことは高い確率で実現すると考えられる. すべり線の数 は上下それぞれ $\langle X \rangle / d_0$ である.

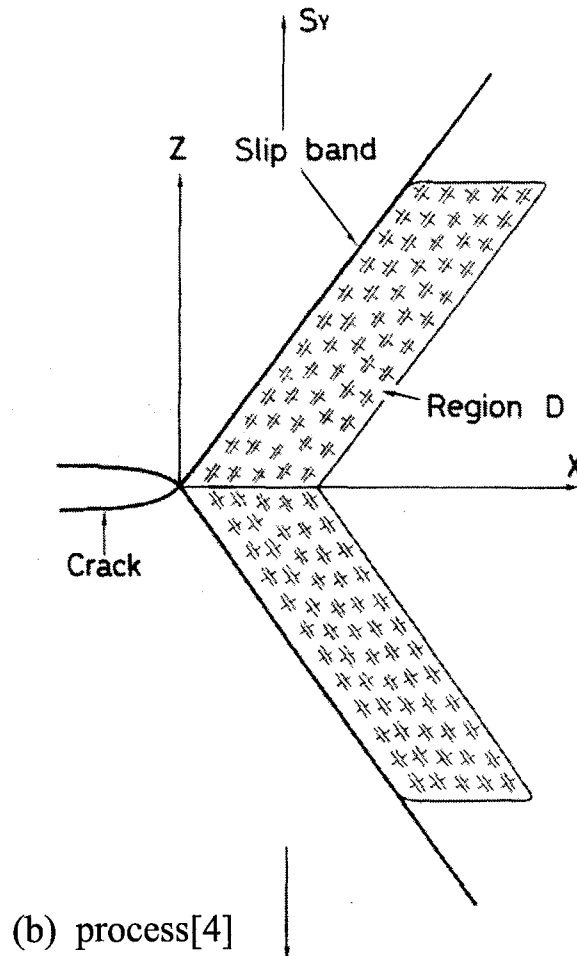


Fig.3.5: Schematic illustration of fatigue crack propagation process.

3.3. き裂伝ば機構

したがって、一つのすべり線に並ぶ転位双極子の数は $w^2 \rho_U^* / (\langle X \rangle / d_0)$, すなわち、一つのすべり線上の転位の数 m は

$$m = \frac{1}{2} \frac{w^2 \rho_U^*}{\langle X \rangle / d_0}. \quad (3.30)$$

最大負荷点⑤に到ると、図 3.5(c) に矢印で示すような方向に転位のすべりが起こり

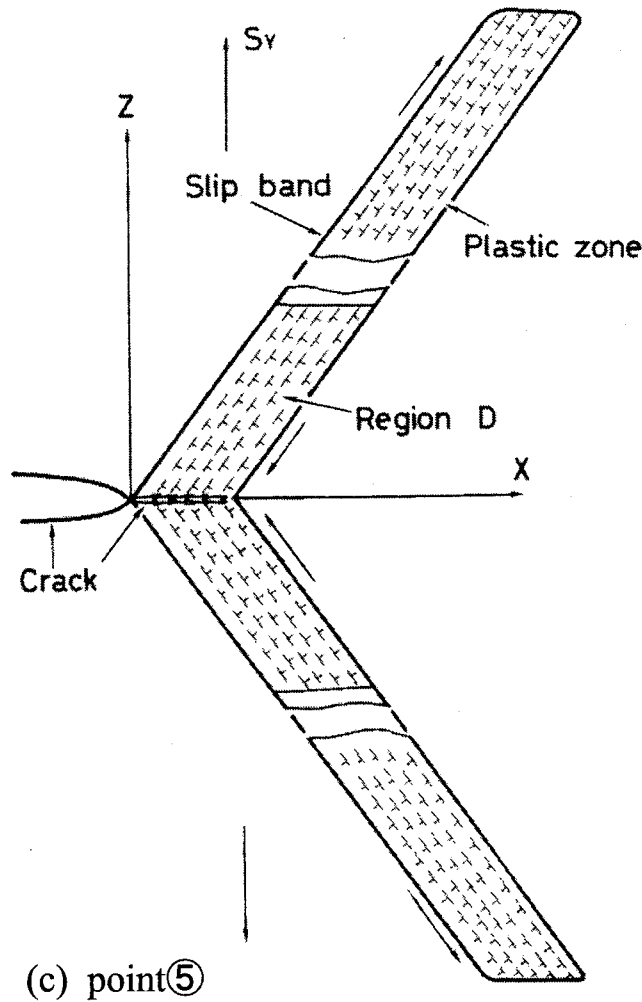


Fig.3.5: Schematic illustration of fatigue crack propagation process.

3. 疲労き裂伝ば

(1) : き裂伝ばと反対方向に移動する各すべり線上の転位は交差点で Cottrell の不動転位を形成し、後で示すように、き裂の前方に長さ $d_0 (= 1.3 \times 10^{-9})\text{m}$ のへき開き裂が多数生じ、同時に

(2) : き裂の伝ば方向に動く転位は

$$\frac{S_Y/2}{G} \times w_p = m d_0 \quad (3.31)$$

にしたがって、長さ w_p のすべり帯上を D の外部へとすべり、発生したき裂を開口させる。

(3.31) 式はせん断変位 (左辺) が堆積した m 個の転位によって生じた塑性変位 (右辺) にほぼ等しいことを示す。 d_0 は転位幅 $1.3 \times 10^{-9}\text{m}$ である。また、 w_p の大きさは破壊進行域の大きさ w のほぼ 100 倍に等しく、これがき裂先端の塑性域であると考えられる。ここで

$$w_p = \frac{2}{3\pi} \left(\frac{\Delta K_{\text{eff}}}{2S_Y} \right)^2 \quad (3.32)$$

とおくと、 da/dn と w の関係から (3.30), (3.31), (3.32) 式を用いて、 da/dn に対する ΔK_{eff} が得られる。

また、き裂先端開口変位範囲 $\Delta\phi_I$ は

$$\Delta\phi_I = \frac{0.73\Delta K_{\text{eff}}^2}{ES_Y} \quad (3.33)$$

と書ける⁽¹¹⁾ ので、エネルギー解放率 g は

$$g = S_Y \Delta\phi_I = \frac{0.73\Delta K_{\text{eff}}^2}{E} \quad (3.34)$$

と表される。ところで、き裂が $\langle X \rangle$ だけ進むに要するエネルギー $g \cdot \langle X \rangle$ は、図 3.5(a) のように D 内に累積した転位双極子のエネルギーに等しいので

$$g \cdot \langle X \rangle = 2w^2 U \quad (3.35)$$

3.3. き裂伝ば機構

が成立するはずであるが、これは ρ_U^* を決める一つの条件式になる。

次にへき開き裂発生について考える。

上述のように(図 3.5(c)), き裂伝ば方向と反対の向きに、すべり線上を移動する転位は、すべり線が交差する点で不動転位となり、そこにへき開き裂が発生することは Cottrell によって解析されている⁽¹²⁾。その場合、発生するき裂の長さは

$$a = \frac{2G}{\pi(1-\nu)S_Y^2} \left\{ \left(2\gamma_s - \frac{m_0 b S_Y}{2} \right) \pm \sqrt{2\gamma_s(2\gamma_s - m_0 b S_Y)} \right\} \quad (3.36)$$

で与えられる。ここで、 γ_s は表面エネルギー、 m_0 は合体する転位の数、 $\nu = 0.3$ である。この式から $a = d_0 (= 1.3 \times 10^{-9} \text{m})$ のき裂が発生するために、合体する転位の数 m_0 を求め、これを次式に代入して、長さ d_0 のき裂の発生エネルギー W を求める⁽¹²⁾。

$$W = \frac{Gm_0^2 b^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \left(\frac{4R}{d_0} \right) + 2\gamma_s d_0 - \frac{\pi(1-\nu)S_Y^2 d_0^2}{8G} - \frac{S_Y m_0 b d_0}{2}, \quad (3.37)$$

ここで、 R は転位場の有効半径である。

さらに、 $(W/d_0) \langle X \rangle$ は長さ $\langle X \rangle$ のき裂を発生させるエネルギーであり、 $g \cdot \langle X \rangle$ は長さ $\langle X \rangle$ のき裂を伝ばさせる(すなわち、き裂を発生させ、同時に開口させる)エネルギーであることから、もし図 3.6 上で

$$\frac{W}{d_0} \langle X \rangle = g \cdot \langle X \rangle \quad (3.38)$$

なる点を求めると、(3.34) 式を用いて、この式は

$$\frac{W}{d_0} = \frac{0.73 \Delta K_{\text{eff}}^2}{E} \quad (3.39)$$

を書けるが、(3.39) 式から得られた ΔK_{eff} は外部から与えられたエネルギーがすべてき裂発生のために消費され、き裂が開口しない ΔK_{eff} の限界値を与えることに

3. 疲労き裂伝ば

なり，これが $\Delta K_{\text{eff th}}$ であると考えられる．実験から得られた $\Delta K_{\text{eff th}}$ は

$$\Delta K_{\text{eff th}} = 1.64 \times 10^{-5} E \quad (3.40)$$

であるが⁽¹³⁾，(3.39) 式から得られる ΔK_{eff} がこれに等しくなることは，次節で数値的に明らかにされる．

3.4 実験結果との比較

ここでは、3.2節と3.3節との処方にしたがって、具体的な計算例を示す。比較のために用いられるのは、3%シリコン鉄における下限界近傍の疲労き裂伝ば試験結果⁽¹⁴⁾である。その化学成分、機械的性質はそれぞれ表3.1、3.2に示す。

Table3.1 : Chemical composition of material (Wt%).

C	Si	Mn	P	S	Al
0.007	3.02	0.15	0.013	0.004	0.46

Table3.2 : Mechanical properties of material.

Yield strength	Tensile strength	Reduction of area
S_Y (MPa)	S_B (MPa)	ϕ (%)
431	576	40.5

先ず、(3.27)式において、 $\varepsilon_p = 0.5\%$ とすると

$$c_0 = 8.62 \times 10^6 \quad (\text{J/m}^3).$$

また、 $\rho_U^* = 4.51 \times 10^{16} \text{m}^{-2}$ 、 $G = 8.3 \times 10^4 \text{MPa}$ 、 $b = 2.5 \times 10^{-10} \text{m}$ として、(3.28)式より

$$U = 8.7 \times 10^7 \quad (\text{J/m}^3).$$

3. 疲労き裂伝ば

したがって

$$U/c_0 = 10.$$

今、例として、 $da/dn = 1 \times 10^{-9} \text{m/cycle}$ の場合を考える。 $d_0 = 1.3 \times 10^{-9} \text{m}$ と
して、図 3.2 より

$$w = 5.07 \times 10^{-8} \quad (\text{m})$$

が得られ、これを用いると、図 3.3 より

$$\langle X \rangle = 6.34 \times 10^{-9} \quad (\text{m})$$

が得られる。図 3.5(a) で領域 D の上半分に含まれる転位双極子の数は

$$w^2 \rho_U^* = (5.07 \times 10^{-8})^2 \times 4.51 \times 10^{16} = 116.$$

き裂 $\langle X \rangle$ を発生させるすべり帯内の転位双極子の列の数は

$$\frac{\langle X \rangle}{d_0} = 4.9.$$

したがって、図 3.5(b) に示される一つの列の転位双極子の数は

$$\frac{116}{4.9} = 23.7.$$

すなわち、1 列に並ぶ転位の数はそれぞれ $m \cong 11.8$ となる。これを用いると、
(3.31) 式より

$$w_p = 5.92 \times 10^{-6} (\sim 116w) \quad (\text{m}).$$

これを (3.32) 式に代入すると

$$\Delta K_{\text{eff}} = 4.54.$$

3.4. 実験結果との比較

この値と $E = 2.16 \times 10^5 \text{MPa}$ を用いると, (3.34) 式より

$$g = 69.7 \quad (\text{J/m}^2).$$

g, w, U が得られたので

$$g \cdot \langle X \rangle = 4.42 \times 10^{-7} \quad (\text{J/m}).$$

また

$$2w^2U = 4.47 \times 10^{-7} \quad (\text{J/m}).$$

すなわち, (3.35) 式がほぼ成立する.

次に, $\gamma_s = 2 \text{J/m}^2$ として, (3.36) 式よりき裂長さ $d_0 = 1.3 \times 10^{-9} \text{m}$ を発生させる転位の数を求めると, $m_0 \cong 3$. したがって, き裂長さ $d_0 = 1.3 \times 10^{-9} \text{m}$ を発生させるエネルギー W は, (3.37) 式より $R = 7.75 \times 10^{-6} \text{m}$ として

$$W = 5.51 \times 10^{-8} \quad (\text{J/m}).$$

すなわち, 単位長さのき裂を発生させるエネルギーは

$$\frac{W}{d_0} = 42.4 \text{J/m}^2 = 42.4 \times 10^{-6} \text{MPa} \cdot \text{m}$$

となる. これを (3.39) 式に代入すると

$$\Delta K_{\text{eff}} = 3.54 \text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$$

が得られるが, (3.40) 式に示した実験式から得られる $\Delta K_{\text{eff th}}$ も $3.54 \text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ となり, 完全に一致する. あるいはまた, (3.37) 式の W の第一項は E を含み, 第二項以下より 1 桁以上大きいことから, W を第一項で近似すると, (3.39) 式から

$$\Delta K_{\text{eff}} = 1.62 \times 10^{-5} E$$

3. 疲労き裂伝ば

が得られ、実験式 (3.40) と極めてよい一致を示す。

この例にならって、次の五つの場合を示したものが表 3.3 である。

Table3.3 : The calculated values based on our model.

da/dn (m/cycle)	5.77×10^{-10}	1×10^{-9}	1×10^{-8}	2×10^{-7}	9.24×10^{-7}
w (m)	3.2×10^{-8}	5.07×10^{-8}	2.24×10^{-7}	1.9×10^{-6}	5.32×10^{-6}
$\langle X \rangle$ (m)	4.19×10^{-9}	6.34×10^{-9}	2.94×10^{-8}	2.57×10^{-7}	9.0×10^{-7}
$\langle N \rangle$	6.4	5.4	3.5	1.2	1
m	7.2	11.8	50	412	922
w_p (m)	3.6×10^{-6}	5.92×10^{-6}	2.5×10^{-5}	2.07×10^{-4}	4.63×10^{-4}
ΔK_{eff}	3.54	4.54	9.36	26.83	40.2
$2w^2U$ (J/m)	1.78×10^{-7}	4.47×10^{-7}	8.37×10^{-6}	6.28×10^{-4}	4.93×10^{-3}
$g \cdot \langle X \rangle$ (J/m)	1.78×10^{-7}	4.42×10^{-7}	8.70×10^{-6}	6.25×10^{-4}	4.92×10^{-3}
$\frac{W}{d_0} \langle X \rangle$ (J/m)	1.78×10^{-7}	2.69×10^{-7}	1.25×10^{-6}	1.09×10^{-5}	3.82×10^{-5}

表 3.3 から da/dn に対して得られた ΔK_{eff} の値は、図 3.6 に示すように実験式

$$\frac{da}{dn} = 1.3 \times 10^{-11} (\Delta K_{\text{eff}})^{3.0} \quad (3.41)$$

と極めてよい一致を示す。また、 da/dn に対する $g \cdot \langle X \rangle = 2w^2U$ 、および $(W/d_0) \langle X \rangle$ を図 3.7 に示す。

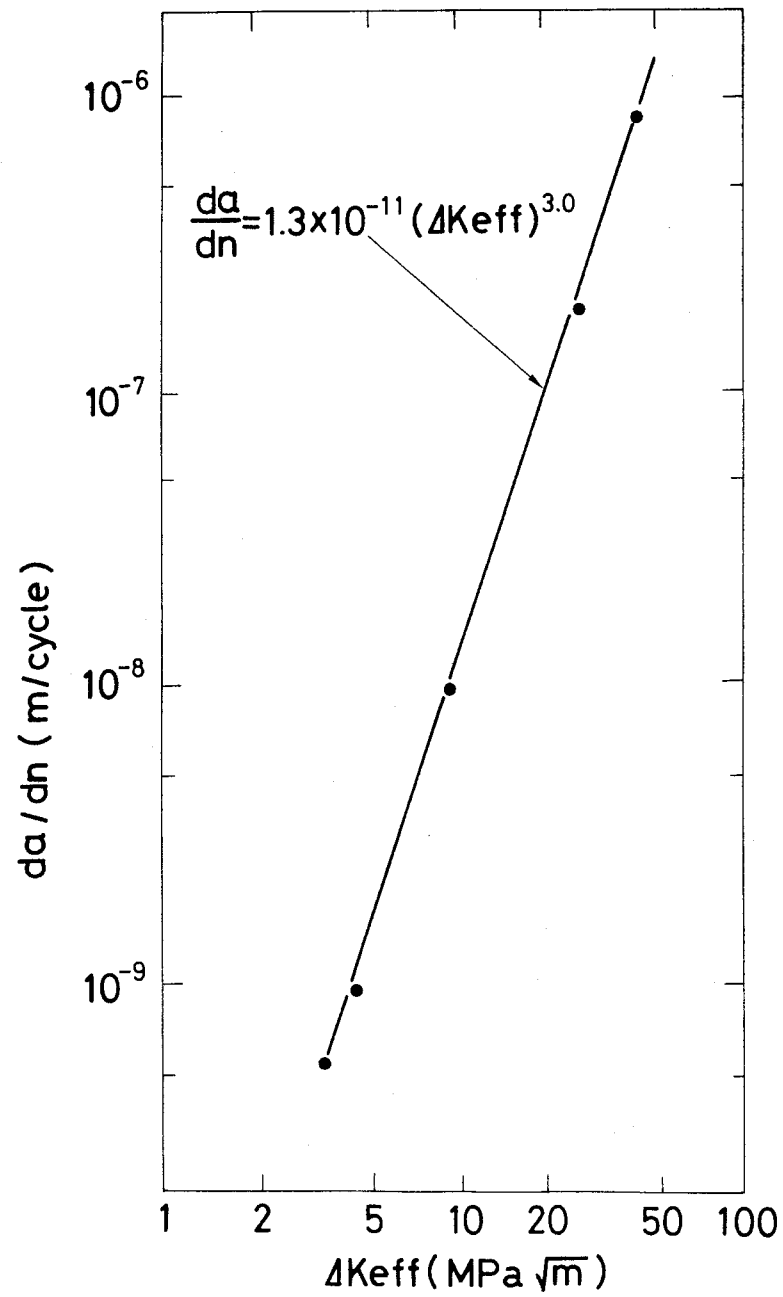


Fig.3.6 : da/dn versus ΔK_{eff} .

3. 疲労き裂伝ば

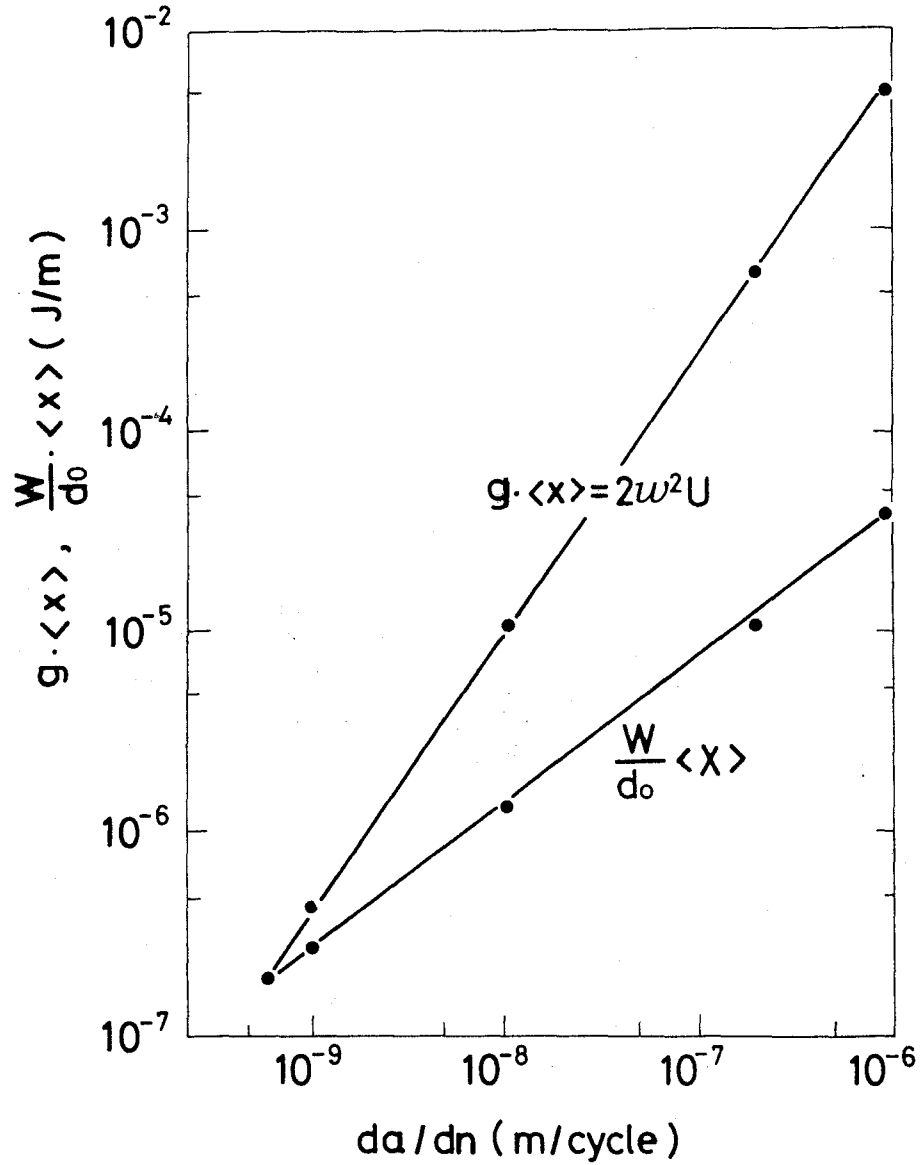


Fig.3.7 : Values of $g \cdot \langle X \rangle$ and $\frac{W}{d_0} \cdot \langle X \rangle$ for da/dn .

また、表 3.3 から $\langle N \rangle = 1$ の場合、 $\langle X \rangle = 9.0 \times 10^{-7} \text{m}$ であるが、これがストライエーション間隔に相当する。これに対応するき裂伝ば速度は $9.24 \times 10^{-7} \text{m/cycle}$

3.4. 実験結果との比較

で、ストライエーション間隔にほぼ一致していること、およびストライエーションが観察される伝ば速度がこの速度の前後であることなどは、われわれの確率論的モデルが、実験観察結果をよく再現していることを示すものである。

3. 疲労き裂伝ば

3.5 結言

以前に提案した疲労き裂伝ばに対する確率論的損傷累積モデルに含まれるパラメータに、き裂発生モデルに採用したと同じく、転位密度を基礎にした物理的意味を与え、この新しいモデルを用いて、**mode I** 疲労き裂の伝ば機構を提案した。得られた結果は以下の通りである。

- (1)：エネルギー解放率 g によりき裂が $\langle X \rangle$ だけ進む場合、エネルギー $g \cdot \langle X \rangle$ がき裂先端の領域 D 内に転位双極子の形で累積し、それらがき裂先端前方で交差するすべり帯上に並び、双極子の一方の列の転位はへき開き裂発生に寄与し、他方の列の転位はすべり変形に関与して、き裂の開口に寄与する。したがって、き裂は劈開き裂の発生と開口とがほぼ同時に起こることにより伝ばする、という新しい型の伝ば機構が得られた。
- (2)： da/dn に対する ΔK_{eff} を求めると、その関係が実験と一致することが確かめられた。
- (3)： $g \cdot \langle X \rangle$ がへき開き裂発生のエネルギーに等しい(き裂開口のエネルギーは 0) という条件で求められた ΔK_{eff} は $\Delta K_{\text{eff th}}$ であると考ええると、実験結果と一致することが確かめられた。
- (4)：き裂先端の塑性域の大きさが塑性域内に含まれるすべり線上に並ぶ転位の数との関係から算出された。
- (5)：ストライエーションの出現が理論的に説明された。

参考文献

- (1) 伊原千秋, 五十嵐顕人, 材料, **30**(1981) 574-578.
- (2) K.P.Oh, *J.Engng.Mater.Tech.Trans.ASME*, **100**(1978) 170-174.
- (3) A.Tsurui and A.Igarashi, *J.Engng.Mater.Tech.Trans.ASME*,
102(1980) 300-302.
- (4) 伊原千秋, 五十嵐顕人, 材料, **29**(1981) 434-438.
- (5) C.Laird and G.C.Smith, *Phil.Mag.*, **7**(1962) 847-857.
- (6) R.M.N.Pelloux, *Trans.ASM*, **62**(1969) 281-285.
- (7) C.Ihara and T.Tanaka, *Fatigue Fract.Engng.Mater.Struct.*,
23(2000) 375-380.
- (8) 菅田淳, 植松美彦, 谷本憲史, 上南恵資, 橋本亜希桐, 城野政弘,
日本機械学会論文集,A, **66**(2000) 83-90.
- (9) 伊原千秋, 田中武之, 日本機械学会論文集,A, 69(2003) に掲載決定
- (10) J.G.Antonopoulos, L.M.Brown and A.T.Winter, *Phil.Mag.*,
34(1976) 549-563.
- (11) L.M.Brown, *Metal Science*, **11**(1977) 315-320.
- (12) B.Budiansky and J.W.Hutchinson, *J.Appl.Mech.Trans.ASME*,
45(1978) 267-276.
- (13) A.H.Cottrell, *Trans.Met.Soc.AIME*, **212**(1958) 192-203.
- (14) J.Wasen and E.Heier, *Int.J.Fatigue*, **20**(1998) 737-742.

3. 疲労き裂伝ば

- (15) K.Tanaka, M.Hojo and Y.Nakai, *Mat.Sci.Engng.*, **55**(1982) 85-96.

本論文の課題である金属疲労の理論的研究は、ミクロに端を発して、マクロに現れる疲労破壊現象をミクロからマクロまでの過程を順次追うことによって、その破壊構造を説明しようとするものである。

その場合、一貫して流れるのは“エネルギー”であった。すなわち、損傷を表すエネルギーの流れが、ミクロとマクロの間でどのように移り替わっていくのか、その過程を追い求めていこうとするものである。疲労現象のミクロでの主役は転位であると見なされているが、転位論は既に種々に論じられており、またマクロでは破壊力学が現象を取扱う武器として大いに成果を挙げている。

したがって、われわれの課題は、これらの武器を用いて得られたミクロおよびマクロでの成果をどのような過程を通じて結合させるかであり、未完の材料強度学を、疲労現象に関して一つにまとめて完成させることにあった。

本研究で明らかになったことは、マクロ的に与えられたエネルギーが損傷を表すミクロの多数の転位群のエネルギーになり、それが損傷の累積を取扱う確率過程を通じて転位を増殖させ、ついにはき裂を発生させ、あるいはき裂を伝播させるというマクロの破壊のエネルギーに姿を変える、ということである。言い換えると、ミクロとマクロを結ぶのはエネルギーの流れであり、その流れを誘導す

4. 結論

るのが確率論的損傷累積過程である，ということである。

各章で得られた結果は，それぞれその章の結言にまとめられているが，ここでは上述のようなより包括的な立場に立って，それらをまとめることにする。

第2章は疲労き裂の発生についての考察であった。

そこでは特に高サイクル疲労でのき裂発生に適用できる確率論的損傷累積過程を提案した。この過程を介して，マクロ的に与えられたエネルギーがミクロの転位を揺り動かし，転位の増殖機構を通じて増殖した転位が，運動を阻止する場所に累積し，そこで累積した転位群の弾性エネルギーの，表面エネルギーへの転移を通じて，き裂発生を定義した。この場合のき裂はセル程度のすべり帯き裂である。セルの大きさは理論的に求められるから，これからき裂の大きさおよび深さが求められる。そして，これらの定義によって，われわれが最終的に切望していたき裂発生寿命が理論的に求められたことが最大の収穫であった。

さらに，発生したき裂がセル程度のものであったから，結晶粒径の異なる材料でも寿命は同じになるが，このことは実験的にも示されている。

第3章は **mode I** 疲労き裂の伝ば機構についての考察であった。

そこではき裂伝ばに対する確率論的損傷累積モデルを提案し，そのモデルに含まれるパラメータに，第2章でのき裂発生モデルに採用したのと同じく転位密度を基礎にした物理的意味を与えた。その結果，マクロ的に与えられたエネルギーがミクロの転位双極子群のエネルギーに移り，それらの転位がへき開き裂の発生と開口を行って，結局マクロのき裂伝ばを演出するという過程が得られた。

すなわち，マクロ的に与えられたエネルギー解放率 g によりき裂が $\langle X \rangle$ だけ進む場合，エネルギー $g \cdot \langle X \rangle$ がき裂先端の領域 D 内に転位双極子の形で累積し，そ

これらの転位双極子がき裂先端前方で交差するすべり帯上に並び、双極子の一方の列の転位はへき開き裂発生に寄与し、他方の列の転位はすべり変形に関与して、き裂の開口に寄与する。

かくして、き裂はへき開き裂の発生と開口がほぼ同時に起こることによって伝ばする、という新しい型の伝ば機構が得られた。この場合のき裂はへき開き裂であるため、第2章でのき裂発生とはエネルギーの転移が異なった形で行われる。さらに、次のことも示された。

(1)：このモデルを用いて得られた da/dn に対する ΔK_{eff} の関係は実験で得られたものと一致すること。

(2)： $g \cdot \langle X \rangle$ がへき開き裂発生に等しいという条件から $\Delta K_{\text{eff th}}$ が求められるが、これが実験的に求められた結果と完全に一致すること。

(3)：き裂先端の塑性域の大きさが塑性域内に含まれるすべり線上の転位の数から導出できること。

(4)：ストライエーションが理論的に求められること。

これらは特記すべきことである。また、第3章での議論は、転位論に立脚した広義の破壊力学の構造を示したもので、ということもできる。

以上のように、金属疲労のき裂発生と伝ばに関する基礎的な機構を確率過程を用いて、力学的に明らかにすることができたが、本研究によって、得られた知見をもとに、さらに低サイクル疲労におけるき裂発生、**mode II** き裂の伝ばに関する研究などが可能となり、疲労破壊に関するすべての挙動がやがて明らかにされるものと思われる。そして、これらの確率論的な力学法則を総合的に

4. 結論

考察することにより，工学的ならびに工業的な要求に堪えうる理論として定着することが期待される．

付録 A $F_\ell(U/\sigma)$ の導出

2.2 節での仮定のもとでの $F_\ell(U/\sigma)$ の導出⁽¹⁾ は次のように与えられる.

先ず, S_n ($n = 1, 2, \dots$) は第 n 番目の事象が起こる瞬間を表す確率変数, $N(t)$ は時刻 t までに起こった事象の数を表す確率変数とし, 特に過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ はパラメータ λ のポアソン過程であると仮定する. また, X_n ($n = 1, 2, \dots$) は第 n 番目の事象によって生起された損傷の大きさを表す分布関数 $H(x)$ の確率変数である. 今, 次のような累積過程を考える.

$$Z(t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{N(t)} X_n \exp[-\alpha(t - S_n)] & \text{for } N(t) > 0, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

これは時刻 t における損傷の総量を表す.

われわれは $Z(t)$ がある特定の値 U をはじめてこえる時刻 T の平均値を求める. $Z(t)$ がはじめて U をこえて, 時刻 t に区間 $(z, z + dz)$ ($z > U$) に落ちる確率 $f(z, t)$ を考える (ただし, $Z(t)$ は時刻 t までには U をこえないものとする). その場合, 関数 $f(z, t)$ は次の積分方程式を満足することが示される.

$$\begin{aligned} f(z, t) = & - \int_0^U \lambda r(x, t|0) dH(z - x) \\ & + \lambda \int_0^t ds \int_U^\infty dy \int_0^U r(x, s|y) f(y, t - s) dH(z - x), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

付録 A $F_\ell(U/\sigma)$ の導出

ここで

$$r(x, t|y)dx dy = \Pr\{x < Z(s+t) \leq x+dx | y < Z(s) \leq y+dy\}. \quad (\text{A.3})$$

われわれの場合, $r(x, t|y)$ の明白な表示を見付けることができる. そして Laplace 変換を用いると, (A.2) 式の形式的な解が得られる. 今, $\lambda/\alpha = \ell$ が整数とすると, 少々やっかいな計算の後に

$$\widehat{f}(z, p) = \int_0^\infty \exp[-pt] f(z, t) dt$$

で定義される $f(z, t)$ の Laplace 変換を以下の形で求めることができる.

$$\widehat{f}(z, p) = \frac{\exp\left[-\frac{z}{\sigma}\right] \frac{1}{p+1} \sum_{n=0}^{\ell} \frac{(\ell-n+1)_n (U/\sigma)^n}{(p\ell + \ell - n)_n n!}}{1 + \frac{U}{\sigma} \exp\left[-\frac{U}{\sigma}\right] \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\ell-1} \frac{(\ell-n)_{n+1} (n+2)_n (U/\sigma)^{m+n}}{(p\ell + \ell + m - n - 1)_{2n+2} m! n!}}, \quad (\text{A.4})$$

ここで

$$(\beta)_n = \beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1), \quad (\beta)_0 = 1$$

である. $\int_0^\infty \widehat{f}(z, p) dz$ は確率変数 T の確率密度関数の Laplace 変換であるから, (A.4) 式より

$$\begin{aligned} \lambda \bar{T} = F_\ell(U/\sigma) &= -\lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \int_U^\infty \widehat{f}(z, p) dz \\ &= \frac{\ell!}{(U/\sigma)^\ell} \left\{ \exp\left[\frac{U}{\sigma}\right] + \frac{U}{\sigma} \sum_{n=0}^{\ell-2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\ell-n)_{n+1} (n+2)_n (U/\sigma)^{m+n}}{(\ell+m-n-1)_{2n+2} m! n!} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\ell)_\ell (U/\sigma)^{m+\ell}}{(m)_{2\ell} m!} - \sum_{m=0}^{\ell-1} \frac{\ell (U/\sigma)^m}{(\ell-m)m!} \right\} - \ell \sum_{m=\ell+1}^{\infty} \frac{1}{m}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

この $F_\ell(U/\sigma)$ は定義通りに計算すると、数値計算上問題があるが、次のように変形できる⁽²⁾。

$$\begin{aligned} F_\ell(U/\sigma) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(U/\sigma)^n}{n(n+\ell-1)_{n-1}} \\ &= 1 + U/\sigma + \frac{(U/\sigma)^2}{2(\ell+1)} + \frac{(U/\sigma)^3}{3(\ell+1)(\ell+2)} + \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

また、(2.7) 式は (2.4) 式からも導けるが、以下のように、直接求めることもできる⁽³⁾。

すべり帯き裂発生までの寿命 (時間) の確率密度関数を $f(t)$ とすると、 $f(t)dt$ は t と $t+dt$ の間に蓄積されたエネルギーがはじめて U をこえる確率であるから、次の関係が成立する。

$$f(t)dt = \int_0^U dx g(x, t) \lambda \exp[-(U-x)/\sigma] dt, \quad (\text{A.7})$$

ここで、 $g(x, t)dt$ は時刻 t に歪エネルギーが x と $x+dx$ の間にある確率であり、 $\lambda \exp[-(U-x)/\sigma]dt$ は時刻 t と $t+dt$ の間に事象 A が起こって、 $U-x$ 以上のエネルギーが蓄積される確率である。

ところで、時間 t の間に事象 A が n 回起こる確率は、A がポアソン過程にしたがって起こるので

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp[-\lambda t] \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A.8})$$

である。そこでこれを用いると、 $g(x, t)$ は

$$g(x, t) = \delta(x) \exp[-\lambda t] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp[-\lambda t] g_n(x) \quad (\text{A.9})$$

と書ける。 λ は (2.2) 式で与えられており、 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。また $g_n(x)$ は事象 A が n 回起こったときに、蓄積されるエネルギーの確率密度

付録 A $F_c(U/\sigma)$ の導出

関数であって、事象 A が 1 回起こったときに蓄積されるエネルギーは平均 σ の指数分布であるから、 $g_n(x)$ は

$$g_n(x) = \frac{x^{n-1}}{\sigma^n (n-1)!} \exp[-x/\sigma] \quad (\text{A.10})$$

と表される.

したがって、(A.9)、(A.10) 式を用いて (A.7) 式を計算すると、結局

$$f(t) = \lambda \exp[-\lambda t - (U/\sigma)] I_0 \left(2 \sqrt{(U/\sigma) \lambda t} \right) \quad (\text{A.11})$$

となる. ただし、 $I_0(x)$ は 0 次の第一種変形ベッセル関数であって、次式で与えられる.

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{(n!)^2}. \quad (\text{A.12})$$

(A.11) 式より、平均寿命 (時間) \bar{T} は

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{U}{\sigma} \right) \quad (\text{A.13})$$

となり、これから平均寿命 (回数) \bar{N}_i が

$$\bar{N}_i = \frac{\omega}{2\pi} \bar{T} = \exp \left[\frac{Q}{\sigma} \right] \left(1 + \frac{U}{\sigma} \right) \quad (\text{A.14})$$

と求められる.

付録 B (3.22) 式の導出

(3.22) 式は次のようにして求められる⁽⁴⁾.

$h \geq 1$ のとき, $g(x, h)dx$ は h 回の繰返しで, 損傷の蓄積量が x と $x + dx$ の間にある確率であるから, 先ず, h 回繰返し応力をかけたときの損傷の分布を考える. $k (k = 1, 2, \dots)$ サイクル目で (i, j) 要素に蓄積される損傷を $X_k(i, j)$ とすると, h 回繰返し後の損傷の分布は

$$\Pr \left\{ \sum_{k=1}^h X_k(i, j) \leq x \right\} \quad (\text{B.1})$$

と表される. これは h 回の応力繰返しによって, (i, j) 要素に蓄積された損傷が x 以下である確率である. 本文で仮定されたように, 各サイクルでの損傷 $X_k(i, j)$ は互いに独立で, 平均が $\sigma(i, j)$ の同一指数分布にしたがう. そこで, 次の定理を用いる.

定理: 同一のパラメータ λk をもつ指数分布にしたがう h 個の独立な確率変数の和はアーラン分布にしたがう.

$$\Pr \left\{ \sum_{i=1}^h T_i \leq x \right\} = 1 - \sum_{n=0}^h e^{-\lambda k x} \frac{(\lambda k x)^n}{n!}. \quad (\text{B.2})$$

アーラン分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{(\lambda k)^h}{(h-1)!} x^{h-1} e^{-\lambda k x}. \quad (\text{B.3})$$

付録 B (3.22) 式の導出

今、パラメータ λk に相当するのは $1/\sigma(i, j)$ であるから、(B.2) 式は

$$\Pr\left\{\sum_{k=1}^h X_k(i, j) \leq x\right\} = 1 - \sum_{n=0}^{h-1} e^{-x/\sigma(i, j)} \frac{(x/\sigma(i, j))^n}{n!} \quad (\text{B.4})$$

であり、 $g(x, h)$ はこの分布の確率密度関数であるから

$$g(x, h) = \frac{x^{h-1}}{\sigma(i, j)^h (h-1)!} e^{-x/\sigma(i, j)} \quad (h \geq 1) \quad (\text{B.5})$$

となる。次に $h = 0$ の場合は、繰返し応力が加えられていない状態であり、損傷は 0 である。したがって、この場合、分布が

$$G_{i,j} = \begin{cases} 1 & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

の単位分布となり

$$\Pr\{X(i, j) = 0\} = 1 = \int_0^{\infty} \delta(x) dx \quad (\text{B.7})$$

となるので、 $h = 0$ のときの確率密度関数は $\delta(x)$ となる。したがって、(3.22) 式が成立する。

付 録 C 数値計算上の注意⁽⁴⁾

数値計算の際，応力繰返し数 h がある値以上となるとき， h を連続量と見做すことができる．そのとき，(3.20) 式に相当する式として

$$H_{i,j}(h+m) - H_{i,j}(h) = f(m) \quad (\text{C.1})$$

を用いる．ここで $f(m)$ について考えると，先ず h を連続量と見做さない場合，き裂発生の際に用いた Q を用いて

$$\begin{aligned} H_{i,j}(h) - H_{i,j}(h-1) \\ = \int_0^U dx g(x, h-1) \lambda e^{-(U-x)/\sigma(i,j)} \quad (h = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

と表される．ただし， $\lambda = e^{-Q/\sigma(i,j)}$ である．そして $g(x, h)$ は

$$g(x, h) = \delta(x) P_h(0) + \sum_{\ell=1}^h P_h(\ell) g_\ell(x) \quad (\text{C.3})$$

と書ける． $P_h(\ell)$ は二項分布で， h サイクルのうち， ℓ サイクル，要素に与えられたエネルギーが Q をこえる確率で

$$P_h(\ell) = \binom{h}{\ell} \lambda^\ell (1-\lambda)^{h-\ell} \quad (\text{C.4})$$

であり， $g_\ell(x)$ は (3.22) 式の $g(x, h)$ に相当して

$$g_\ell(x) = \frac{x^{\ell-1}}{\sigma(i, j)^\ell (\ell-1)!} e^{-x/\sigma(i, j)} \quad (\text{C.5})$$

付録 C 数値計算上の注意

である。したがって

$$\begin{aligned}
 H_{i,j}(h) - H_{i,j}(h-1) &= \int_0^U \delta(x) \lambda e^{-(U-x)/\sigma} dx \\
 &\quad + \sum_{\ell=1}^{h-1} \binom{h-1}{\ell} \lambda^\ell (1-\lambda)^{h-1-\ell} \frac{\lambda e^{-U/\sigma}}{\sigma^\ell (\ell-1)!} \int_0^U x^{\ell-1} dx \\
 &= \lambda e^{-U/\sigma(i,j)} \sum_{\ell=0}^{h-1} \frac{(h-1)!}{\ell! (h-1-\ell)! \ell!} \lambda^\ell (1-\lambda)^{h-1-\ell} \left(\frac{U}{\sigma(i,j)} \right)^\ell \quad (C.6)
 \end{aligned}$$

となる。\$h\$ を連続量と見做せるとき、二項分布はポアソン分布で近似できる。

$$\begin{aligned}
 P_{h-1}(x) &= \binom{h-1}{\ell} \lambda^\ell (1-\lambda)^{h-1-\ell} \\
 &= \frac{(h-1)!}{\ell! (h-1-\ell)!} \lambda^\ell (1-\lambda)^{h-1-\ell} \\
 &= \frac{(h-1)(h-2) \times \cdots \times (h-\ell)}{\ell(\ell-1) \times \cdots \times 1} \lambda^\ell (1-\lambda)^{h-1-\ell} \\
 &= \frac{(h\lambda - \lambda)(h\lambda - 2\lambda) \times \cdots \times (h\lambda - \ell\lambda)}{\ell(1-\lambda)(\ell-1)(1-\lambda) \times \cdots \times 1 \times (1-\lambda)} (1-\lambda)^{h-1},
 \end{aligned}$$

ここで、\$\lambda \to 0, h \to \infty\$ とし、\$h\lambda = \text{一定}\$、とすると

$$\text{上式} = \frac{(h\lambda)^\ell}{\ell!} e^{-h\lambda}. \quad (C.7)$$

(C.7) 式で \$h = m\$ としたものを (C.1) 式に用いると、(C.6) 式より

$$f(m) = \lambda e^{-U/\sigma(i,j)} e^{-m\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(m\lambda)^\ell}{(\ell!)^2} \left(\frac{U}{\sigma(i,j)} \right)^\ell \quad (C.8)$$

となり、0 次の第一種変形ベッセル関数

$$I_0(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(\ell!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2\ell} \quad (C.9)$$

を用いて

$$f(m) = e^{-Q/\sigma(i,j)} e^{-m e^{-Q/\sigma(i,j) - U/\sigma(i,j)}} \times I_0 \left(2 \sqrt{\frac{U}{\sigma(i,j)}} m \cdot e^{-U/\sigma(i,j)} \right) \quad (\text{C.10})$$

となる. 今, $Q = 0$ なので

$$f(m) = e^{-m - U/\sigma(i,j)} I_0 \left(2 \sqrt{\frac{Um}{\sigma(i,j)}} \right) \quad (\text{C.11})$$

である.

参考文献

- (1) C.Ihara and A.Tsurui, *J.Engng.Mater.Tech.Trans.ASME*,
99(1977) 26-28.
- (2) C.Ihara and T.Tanaka, *Fatigue Fract.Engng.Mater.Struct.*,
23(2000) 375-380.
- (3) 伊原千秋, 五十嵐顕人, 材料, **29**(1980) 434-438.
- (4) 清水啓之, 京都大学修士論文 (1985).

謝辞

本論文を作成するに当たり、種々御教示いただきました京都大学大学院工学研究科北村隆行教授に心より感謝の意を表します。

本研究は著者が京都大学工学部数理工学科に在職中に、指針を得てはじめたものであり、数理工学科を創設され、著者をその一員としてお招きいただきました京都大学工学部(故)国井修二郎教授に厚く御礼申し上げます。

また、本研究のうち特に数理的解析に関して、共同研究者として御協力いただいた京都大学工学部(故)鶴井明教授、五十嵐顕人助教授、福井県立大学田中武之講師に感謝いたします。

さらに、本研究の初期に材料工学に関して種々御教示いただいた京都大学工学部山田敏郎名誉教授、宇部工業高等専門学校幡中憲治校長、名古屋大学大学院工学研究科田中啓介教授に深く感謝いたします。